

# НОВЫЯ ФОРМУЛЫ

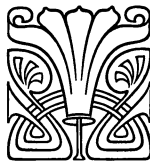
для опредѣленія

## элементовъ орбитъ частицъ кометнаго хвоста

съ примѣненіемъ къ кометѣ 1908 г. (Morehouse).

---

А. Я. Орловъ.



Юрьевъ.

Типографія К. Маттисена.

1910.



# Новыя формулы для опредѣленія элементовъ орбитъ частицъ кометнаго хвоста съ примѣненіемъ къ кометѣ 1908 с. (Morehouse).

## I. Введеніе.

§ 1. Въ статьѣ объ опредѣленіи отталкивательной силы солнца [Изв. Имп. Акад. Наукъ № 7, 1910 г.] мы дали простой способъ для вычисленія величины этой силы; теперь мы покажемъ, какимъ образомъ формулы только что названной статьи могутъ быть примѣнены и къ опредѣленію элементовъ орбитъ частицъ кометнаго хвоста. При этомъ мы будемъ имѣть въ виду главнымъ образомъ хвосты перваго Бредихинскаго типа, гдѣ отталкивательная сила солнца во много разъ превосходитъ ньютоновское притяженіе.

Разсужденія наши основаны на слѣдующихъ двухъ гипотезахъ:

I. Частица кометнаго хвоста движется въ плоскости кометной орбиты.

II. Эта частица движется только подъ вліяніемъ силы, обратно пропорціональной квадрату ея разстоянія отъ солнца.

Пусть  $R$  есть разстояніе частицы отъ солнца,  $m$  — ея масса; массу солнца примемъ за единицу, тогда величина силы будетъ равна

$$\frac{fm}{R^2}$$

гдѣ  $f$  есть постоянная сила. Если  $f > 0$ , то сила отталкивательная, если  $f < 0$ , то сила притягательная. Для Ньютонова притяженія

$$f = -k^2 = [6.4712_n].$$

§ 2. Въ настоящее время для опредѣленія орбитъ частицъ кометнаго хвоста пользуются способомъ Егермана [См. R. Jaegermann. Die Bewegung

der Kometenschweifmaterie auf hyperbolischen Bahnen]. Въ этомъ способѣ, кромѣ гипотезъ, приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, дѣлается еще предположеніе, что частица кометнаго хвоста въ нѣкоторой точкѣ своей гиперболической орбиты встрѣчается съ ядромъ кометы. Это предположеніе намъ кажется совершенно излишнимъ; оно даже усложняетъ дѣло. Дѣйствительно, главною цѣлью изученія движенія облачныхъ массъ въ хвостахъ кометъ является провѣрка нашихъ гипотезъ объ этомъ движеніи; вводя же лишнее предположеніе, мы затрудняемъ провѣрку. Совсѣмъ другое дѣло, если мы, имѣя уже элементы орбиты кометнаго облака, будемъ рѣшать вопросъ о томъ, находилось ли это облако близъ самаго кометнаго ядра или нѣтъ. При такой постановкѣ задачи положительный отвѣтъ будетъ служить лишь подтвержденіемъ гипотезъ предыдущаго параграфа. Встрѣчи же облака съ ядромъ, собственно, и не должно получиться при этихъ вычисленіяхъ, такъ какъ близъ самаго ядра возмущающимъ дѣйствіемъ послѣдняго пренебречь уже нельзя.

Что касается самыхъ формулъ Егермана, то онѣ нуждаются въ пересмотрѣ. Прежде всего, онѣ слишкомъ сложны; кромѣ того, онѣ практически обращаются часто въ неопредѣленность  $\frac{0}{0}$  и ничего не даютъ. Эти формулы оказались, на примѣръ, непригодными для изученія движенія облаковъ, наблюдавшихся въ хвостѣ кометы Morehouse 15-го, 16-го и 17-го октября 1908 г. Вычисленія проф. К. Д. Покровскаго показали, что малѣйшее измѣненіе данныхъ, напр. прибавленіе новаго наблюденія, уже совершенно мѣняетъ результаты, если пользоваться формулами Егермана.

Вычисленіе эфемериды частицъ кометнаго хвоста по заданнымъ элементамъ также требуетъ нѣкоторыхъ замѣчаній, такъ какъ путь, предложенный Егерманомъ для этой цѣли, намъ тоже кажется слишкомъ сложнымъ. Мы разсматриваемъ этотъ вопросъ въ III главѣ и даемъ ниже небольшую таблицу, которая очень облегчаетъ вычисленіе угла  $F$  и совершенно устраняетъ здѣсь таблицы гиперболическихъ функцій.

§ 3. Въ IV главѣ нашей работы мы рѣшаемъ вопросъ о приближеніи кометнаго облака къ ядру кометы. Общепринятый приѣмъ вычисленій состоитъ здѣсь въ томъ, что сначала находятъ точки пересѣченія орбитъ ядра и облака и затѣмъ смотрятъ, проходили ли эти два тѣла одновременно черезъ какую нибудь точку пересѣченія орбитъ; при этомъ опять пользуются очень сложными формулами Егермана [с. стр. 7, форм. (10)]. Но и здѣсь эти формулы даютъ, вообще говоря, очень неопредѣленный результатъ, такъ какъ приходится опредѣлять разности двухъ очень близкихъ другъ къ другу величинъ, что не можетъ быть выполнено съ достаточной точностью. Формулы Егермана могутъ быть, конечно, упрощены, однако мы не дѣлаемъ этого, такъ какъ уже по самому существу задачи, вычисленіе координатъ точекъ пересѣченія двухъ

орбиты не можетъ дать здѣсь надежнаго результата. Дѣйствительно, орбита частицы кометнаго хвоста обыкновенно почти что только касается кометной орбиты, поэтому опредѣленіе точекъ пересѣченія здѣсь крайне не точно. Значительно точнѣе и проще вычислить для нѣсколькихъ близкихъ другъ къ другу моментовъ координаты кометнаго ядра и частицы и посмотрѣть, когда координаты этихъ двухъ тѣлъ отличаются меньше всего. Такъ какъ, кромѣ того, кометное облако лежитъ обыкновенно почти на продолженіи радіуса вектора кометы, то въ приближенныхъ вычисленіяхъ за моментъ изверженія облака изъ ядра можно принять моментъ, когда радіусы векторы кометнаго ядра и облака равны между собою.

§ 4. Иногда элементы орбиты частицы кометнаго хвоста не вычисляютъ, а подбираютъ такъ, чтобы, соотвѣтствуя болѣе или менѣе наблюденіямъ, они въ тоже время удовлетворяли нѣкоторымъ добавочнымъ условіямъ: на примѣръ, ставятъ требованіе, чтобы начальный импульсъ частицы былъ направленъ къ солнцу. Такой путь намъ кажется совершенно неправильнымъ; элементы орбитъ должны быть не подобраны, а вычислены такъ, чтобъ вычисленія наилучшимъ образомъ удовлетворяли наблюденіямъ; должна быть рѣшена слѣдующая задача:

Для нѣсколькихъ близкихъ другъ къ другу моментовъ даны гелиоцентрическія координаты  $(R, w)$  частицы кометнаго хвоста; опредѣлить  $f$  и элементы орбитъ частицы такъ, чтобъ вычисленныя съ этими элементами значенія величинъ  $R$  и  $w$  наилучшимъ образомъ согласовались съ наблюденными.

Такъ какъ элементы кометной орбиты извѣстны, то остается найти слѣдующія элементы орбиты частицы:

$E$  — эксцентриситетъ,

$P$  — параметръ,

$M_\pi$  — время прохожденія частицы черезъ перигелій,

$w_\pi$  — значеніе угла  $w$  для момента  $M_\pi$ .

Мы сохраняемъ здѣсь общепринятые обозначенія. Уголъ  $w$  обыкновенно отсчитывается отъ оси кометной орбиты. Истинную аномалію частицы будемъ обозначать черезъ  $V$ , такъ что

$$w = w_\pi + V.$$

Наблюденія даютъ намъ прямое восхожденіе ( $\alpha$ ) и склоненіе ( $\delta$ ) частицы кометнаго хвоста; но мы не будемъ здѣсь останавливаться на переходѣ отъ  $\alpha$  и  $\delta$  къ  $R$  и  $w$ : это сдѣлано нами въ другомъ мѣстѣ [см. Изв. Импер. Акад. Наукъ № 4, 1909 г.].

## II. Выводъ формулъ для вычисленія элементовъ.

§ 5. При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ (§ 1), движеніе частицы въ плоскости ея орбиты опредѣляется уравненіями:

$$R^2 \frac{dw}{dt} = C = \sqrt{fP},$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{f}{R^2} + \frac{C^2}{R^3},$$

гдѣ  $C$  есть постоянная площадей. Строгое интегрированіе этихъ уравненій общеизвѣстно; но наблюденія охватываютъ обыкновенно столь малый промежутокъ времени, что вмѣсто строгихъ формулъ оказывается болѣе удобнымъ пользоваться нѣсколькими первыми членами разложеній  $R$  и  $w$  въ ряды Тейлора.

Пусть  $R_0, R'_0, R''_0, \dots, w_0, w'_0, w''_0, \dots$  суть значенія  $R, w$  и ихъ послѣдовательныхъ производныхъ по времени для какого-нибудь момента  $t_0$ , тогда:

$$R = R_0 + R'_0 t + \frac{R''_0}{2} t^2 + \dots,$$

$$w = w_0 + w'_0 t + \frac{w''_0}{2} t^2 + \dots,$$

гдѣ, соотвѣтственно уравненіямъ движенія:

$$w'_0 = \frac{C}{R_0^2}, \quad R'_0 = \frac{f}{R_0^2} + \frac{C^2}{R_0^3},$$

$$w''_0 = -\frac{2CR'_0}{R_0^3}, \quad R''_0 = -\frac{2fR'_0}{R_0^3} - \frac{3C^2R'_0}{R_0^4},$$

$$w'''_0 = -\frac{2CR''_0}{R_0^3} + \frac{6CR_0'^2}{R_0^4}, \quad \dots$$

Всѣ эти формулы очень упрощаются, если за начальный моментъ принять время прохожденія частицы черезъ перигелій, т. е.  $M_\pi$ . Дѣйствительно, пусть  $R_\pi, R'_\pi, R''_\pi, \dots, w_\pi, w'_\pi, w''_\pi, \dots$  суть значенія  $R, w$  и ихъ послѣдовательныхъ производныхъ по времени для момента  $M_\pi$ , тогда  $R'_\pi = 0$ , и мы имѣемъ:

$$w'_\pi = \frac{C}{R_\pi^2}, \quad R''_\pi = \frac{f}{R_\pi^2} + \frac{C^2}{R_\pi^3},$$

$$w''_\pi = 0, \quad R'''_\pi = 0,$$

$$w'''_\pi = -\frac{2CR''_\pi}{R_\pi^3}, \quad R^{IV}_\pi = -\frac{2fR''_\pi}{R_\pi^3} - \frac{3C^2R''_\pi}{R_\pi^4},$$

$$\dots$$

Если теперь мы выразимъ производныя  $R''_\pi, R^{IV}_\pi, w'_\pi$  и т. д. черезъ

элементы орбиты частицы, то, ограничиваясь случаемъ гиперболы, выпуклой къ солнцу, получимъ :

$$\begin{aligned} w'_\pi &= n_0, & R''_\pi &= \frac{fE}{R_\pi^2}, \\ w'''_\pi &= -\frac{2n_0^3 E}{x}, & R^{IV}_\pi &= -\frac{f^2 E(3E-1)}{R_\pi^5}, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

гдѣ

$$R_\pi = \frac{P}{x}, \quad x = E - 1, \quad n_0 = x^2 \sqrt{\frac{f}{P^3}}.$$

§ 6. Для того промежутка времени, въ теченіе котораго наблюдается движеніе облака въ хвостѣ кометы, можно положить :

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 + R'_0 t + \frac{R''_0}{2} t^2 + \frac{R'''_0}{6} t^3, \\ w &= w_0 + w'_0 t + \frac{w''_0}{2} t^2 + \frac{w'''_0}{6} t^3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Если бы, однако, удалось прослѣдить движеніе кометнаго облака въ теченіе столь долгаго времени, что формулы (1) оказались бы уже недостаточными, то пришлось бы идти послѣдовательными приближеніями, причемъ сначала нужно было бы взять наблюденія, охватывающія только такой промежутокъ времени, для котораго формулы (1) справедливы.

Наблюденія перемѣщающихся въ хвостѣ частицъ производится близъ момента прохожденія ихъ черезъ перигелій, такъ что  $R'_0$  всегда есть малая величина; вслѣдствіе этого мы можемъ пренебречь произведеніями  $CR'_0{}^2$  и  $C^2 R'_0$ , такъ какъ  $C$  есть тоже малая величина. Сдѣлавъ это, мы, на основаніи формулъ предыдущаго параграфа, получимъ :

$$\begin{aligned} R &= R_0 + R'_0 t + \frac{R''_0}{2} t^2 - \frac{fR'_0}{3R_0^3} t^3, \\ w &= w_0 + \frac{C}{R_0^2} t - \frac{CR'_0}{R_0^3} t^2 - \frac{CR''_0}{3R_0^3} t^3 \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Этими уравненіями мы пользуемся для вычисленія коэффиціента  $f$ , причемъ нужно сдѣлать, вообще говоря, два приближенія. Въ первомъ приближеніи мы полагаемъ :

$$R = R_0 + R'_0 t + \frac{R''_0}{2} t^2.$$

Опредѣливъ отсюда по тремъ или болѣе наблюденіямъ  $R_0$ ,  $R'_0$  и  $R''_0$ , мы вычисляемъ  $C$  по формулѣ :

$$w = w_0 + \frac{C}{R_0^2} t$$

и находимъ затѣмъ  $f$  изъ уравненія

$$f = R_0^2 R_0'' - \frac{C^2}{R_0} \dots \dots \dots (3)$$

Во второмъ приближеніи  $R_0, R_0', R_0''$ , нужно вычислять по формулѣ:

$$R = R_0 + R_0' \left( t - \frac{f}{3R_0^3} t^3 \right) + \frac{R_0''}{2} t^2 \dots \dots \dots (4)$$

считая коэффициентъ  $\frac{f}{3R_0^3}$  уже извѣстнымъ. Формулы (2) и (3) дадутъ затѣмъ болѣе точныя значенія  $C$  и  $f$ . На практикѣ перваго приближенія часто оказывается уже достаточно.

§ 7. Когда  $R_0, R_0', R_0'', f$  и  $C$  извѣстны, то вычисленіе элементовъ орбиты производится слѣдующимъ образомъ. Прежде всего находимъ  $P$  изъ уравненія:

$$P = \frac{C^2}{f}.$$

Далѣе, имѣемъ:

$$R' = R_0' \left( 1 - \frac{f}{R_0^3} t^2 \right) + R_0'' t.$$

Назовемъ черезъ  $t_\pi$  промежутокъ времени между  $M_\pi$  и  $t_0$ , такъ что

$$M_\pi = t_0 + t_\pi \dots \dots \dots (5)$$

При  $t = t_\pi$ ,  $R' = 0$ , поэтому

$$t_\pi = - \frac{R_0'}{R_0''} \left( 1 - \frac{f}{R_0^3} t_\pi^2 \right).$$

Отсюда послѣдовательными приближеніями находимъ  $t_\pi$ . Въ первомъ приближеніи имѣемъ:

$$t_\pi = - \frac{R_0'}{R_0''}.$$

Когда  $t_\pi$  найдено, то формула (5) даетъ намъ  $M_\pi$ ; по уравненію (4) для  $t = t_\pi$  находимъ  $R_\pi$  и, наконецъ,

$$E = 1 + \frac{P}{R_\pi}.$$

Мы имѣемъ теперь всѣ данныя для того, что бы по формуламъ слѣ-

дующей главы вычислить  $V_0$ , истинную аномалию частицы для момента  $t_0$ , и определить  $w_\pi$  из уравнения

$$w_\pi = w_0 - V_0.$$

Изъ сказаннаго видно, что нашъ способъ опредѣленія элементовъ орбитъ частицъ кометнаго хвоста основанъ на томъ же принципѣ, какъ и способъ Лапласа для вычисленія элементовъ кометныхъ орбитъ. Мы воспользовались еще тѣмъ обстоятельствомъ, что наблюдение кометныхъ облаковъ производится всегда близъ ихъ прохожденія черезъ перигелий.

§ 8. Выведенныя сейчасъ формулы даютъ очень хорошее приближеніе; однако отброшенные члены съ  $t^3$  и  $t^4$  могутъ оказать вліяніе на опредѣленіе  $M_\pi$ , такъ какъ формула, служащая для вычисленія  $t_\pi$ , содержитъ малый дѣлитель  $R''_0$ . Упомянутые сейчасъ члены можно принять во вниманіе слѣдующимъ образомъ.

Пренебрегая лишь шестыми степенями  $t$ , мы имѣемъ:

$$R = R_\pi + \frac{R''_\pi}{2} t^2 + \frac{R^{IV}_\pi}{24} t^4$$

Для  $t = -t_\pi$  имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= R_\pi + \frac{R''_\pi}{2} t_\pi^2 + \frac{R^{IV}_\pi}{24} t_\pi^4 \\ R'_0 &= -R''_\pi t_\pi - \frac{R^{IV}_\pi}{6} t_\pi^3 \\ R''_0 &= +R''_\pi + \frac{R^{IV}_\pi}{2} t_\pi^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (*)$$

Если приближенныя значенія элементовъ уже найдены по формуламъ § 7, то члены съ  $R^{IV}_\pi$  мы можемъ считать извѣстными; дѣйствительно,

$$R^{IV}_\pi = -\frac{f^2 E(3E-1)}{R_\pi^2},$$

слѣдовательно, всѣ члены съ  $R^{IV}_\pi$  содержатъ весьма малаго множителя  $f^2$ , и значенія остальныхъ входящихъ въ эти члены величинъ нужно знать лишь приближенно. Величины  $R_0$ ,  $R'_0$  и  $R''_0$  тоже намъ извѣстны, такъ что уравненія (\*) содержатъ три неизвѣстныхъ  $R_\pi$ ,  $t_\pi$  и  $R''_\pi$ . Пусть, для сокращенія письма,

$$a = -\frac{R^{IV}_\pi}{6} t_\pi^2.$$

Тогда

$$R''_{\pi} = R''_0 + 3a$$

$$t_{\pi} = \frac{-R'_0 + at_{\pi}}{R''_{\pi}}$$

$$R_{\pi} = R_0 - \left( \frac{R''_{\pi}}{2} - \frac{a}{4} \right) t_{\pi}^2 .$$

Такъ какъ

$$R''_{\pi} = \frac{fE}{R_{\pi}^2}$$

то

$$f = \frac{R_{\pi}^2 R''_{\pi}}{E} .$$

Это значеніе  $f$  должно совпадать съ тѣмъ, которое получается по формулѣ (3) § 6. Когда  $t_{\pi}$  извѣстно, то  $M_{\pi}$  и  $w_{\pi}$  вычисляются такъ же, какъ и раньше.

*Замѣчаніе I.* Солнце, кометное ядро и частицу кометнаго хвоста мы принимаемъ за матеріальныя точки. Кометныя облака, къ изученію движенія которыхъ приходится примѣнять наши формулы, мы также считаемъ за матеріальныя точки; поэтому иногда мы безразлично здѣсь говоримъ: частица кометнаго хвоста и кометное облако.

*Замѣчаніе II.* Кометное облако находится почти что на продолженіи радіуса вектора кометы; кромѣ того разстояніе облака отъ ядра невелико, поэтому въ приближенныхъ расчетахъ мы можемъ въ формулѣ

$$f = R_0^2 R''_0 - \frac{C^2}{R_0}$$

положить

$$C = c = \sqrt{2k^2 q}$$

гдѣ  $c$  есть постоянная площадей движенія кометнаго ядра, а  $q$  его перигельное разстояніе. Мы имѣемъ такимъ образомъ

$$f = R_0^2 R''_0 - \frac{2k^2 q}{R_0} .$$

Эта формула показываетъ, что для опредѣленія величины отталкивательной силы солнца въ первомъ приближеніи достаточно знать только одни лишь разстоянія облака отъ солнца.

*Замѣчаніе III.* Въ формулѣ (2) мы съ принятой степенью точности можемъ положить

$$R''_0 = \frac{f}{R_0^2} .$$

### III. Вычисленіе эфемериды частицъ кометнаго хвоста.

§ 9. Покажемъ теперь, какимъ образомъ по заданнымъ элементамъ орбиты частицы можно вычислить ея гелиоцентрическія координаты  $R$  и  $w$  для какого-нибудь момента времени  $t$ .

Если время считается отъ момента прохожденія черезъ перигелій, то  $R$  и  $w$  въ случаѣ гиперболы, выпуклой къ солнцу, опредѣляются извѣстными равенствами:

$$E \operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = N, \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$N = \frac{\sqrt{f}}{A^{\frac{3}{2}}} t, \quad A = \frac{P}{E^2 - 1},$$

$$\operatorname{tg} \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{E-1}{E+1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$R = \frac{P}{E \cos V - 1} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$w = w_{\pi} + V.$$

Уравненіе (6) мы можемъ переписатьъ такъ

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = N - x \operatorname{tg} F, \quad \dots \dots \dots (9)$$

гдѣ, какъ и раньше,

$$x = E - 1.$$

Такъ какъ  $E$  всегда близко къ единицѣ, то  $x$  есть малая величина, поэтому написанное сейчасъ уравненіе съ  $F$  проще всего рѣшается послѣдовательными приближеніями, причемъ сразу же можно найти весьма близкое значеніе для  $F$  на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Пусть

$$y = \operatorname{tg} \frac{F}{2}$$

тогда

$$\operatorname{tg} F = \frac{2y}{1-y^2} = 2y + 2y^3 + \dots$$

$$\ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = \ln \frac{1+y}{1-y} = 2y + \frac{2}{3} y^3 + \dots$$

Эти ряды сходятся тѣмъ быстрѣе, чѣмъ меньше  $F$ . При достаточно маломъ  $F$  мы можемъ принять:

$$\operatorname{tg} F = \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = 2y.$$

Въ этомъ случаѣ формула (9) перепишется такъ:

$$2 \operatorname{tg} F = N - x \operatorname{tg} F,$$

откуда

$$\operatorname{tg} F = \frac{N}{2+x} = \frac{N}{E+1}$$

Если величиной  $y^3$  и нельзя пренебречь, то все же послѣдняя формула дастъ намъ приближенную величину  $\operatorname{tg} F$ ; подставляя ее въ правую часть равенства (9), получаемъ:

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = \frac{2N}{E+1}$$

Эта формула даетъ уже довольно точное значеніе для угла  $F$  даже при большихъ  $F$ . Во второмъ приближеніи уголъ  $F$  нужно вычислять по формулѣ (9), считая въ правой ея части  $F$  извѣстнымъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вопросъ о вычисленіи  $F$  сводится къ рѣшенію уравненія

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = N_0,$$

гдѣ  $N_0$  есть нѣкоторая заданная величина. Написанное уравненіе проще всего рѣшается съ помощью приложенной ниже таблицы, гдѣ по аргументу  $F$  дается  $N_0$ . Обратное, если задано  $N_0$ , то легко найти  $F$ .

Когда уголъ  $F$  найденъ, то формула (7) даетъ намъ  $\operatorname{tg} \frac{V}{2}$ , послѣ чего послѣдовательно находимъ:

$$\sin^2 \frac{V}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} - \frac{2 E \sin^2 \frac{V}{2}}{P},$$

и наконецъ

$$\sin V = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{V}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}}.$$

Послѣдняя формула служитъ для вычисленія  $V$ . Значеніе четырехзначнаго логариѳа величины  $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}$  мы даемъ здѣсь въ слѣдующей таблицѣ:

$\lg \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}$	$\lg (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2})$	$\lg \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}$	$\lg (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2})$
6.0	0.0000	7.0	0.0004
6.1	.0001	7.1	.0005
6.2	.0001	7.2	.0007
6.3	.0001	7.3	.0009
6.4	.0001	7.4	.0011
6.5	.0001	7.5	.0014
6.6	.0002	7.6	.0017
6.7	.0002	7.7	.0022
6.8	.0003	7.8	.0027
6.9	.0003	7.9	.0034
7.0	.0004	8.0	.0043

§ 10. Если  $N < 0.54$  ( $\lg N < 0.73$ ), то приведенной ниже таблицей уже пользоваться нельзя, но въ этомъ случаѣ истинная аномалія кометнаго облака очень просто вычисляется по формуламъ § 5. Мы получили тамъ:

$$V = n_0 t - \frac{n_0^3 E}{3x} t^3$$

Членами, содержащими высшія степени  $t$ , можно уже пренебречь; кромѣ того, здѣсь можно положить:

$$\sin^2 \frac{V}{2} = \frac{V^2}{4}$$

Такъ какъ

$$n_0 = x^2 \sqrt{\frac{f}{P^3}}, \text{ гдѣ } x = E - 1,$$

то между  $n_0$  и  $N$  существуетъ простая зависимость:

$$n_0 t = N \sqrt{\frac{E-1}{(E+1)^3}},$$

Положимъ

$$n = n_0 t,$$

тогда

$$V = n - \frac{n^3 E}{3x}$$

Этой формулой удобно пользоваться при небольшихъ значеніяхъ  $t$ .

#### IV. Вычисленіе момента и скорости изверженія частицы изъ кометнаго ядра.

§ 11. Формулами предыдущаго параграфа можно пользоваться для различныхъ цѣлей. Прежде всего надо вычислить  $R$  и  $w$  для моментовъ

наблюдения, чтобы видѣть, насколько вычисления согласуются съ наблюдениями. Далѣе, сопоставляя эфемериду кометнаго облака съ эфемеридой ядра кометы, мы сразу же можемъ опредѣлить моментъ, когда облако было ближе всего къ ядру. Пусть  $r$  есть радиусъ векторъ ядра. Моментъ, когда  $R = r$ , можно принять за моментъ изверженія облака. (§ 4). Такъ какъ выброшенная частица остается въ сферѣ дѣйствія кометы очень короткое время, то обыкновенно допускаютъ, что дѣйствіемъ ядра можно пренебречь, начиная съ момента изверженія. При такомъ предположеніи гиперболическая скорость частицы въ моментъ изверженія является геометрической суммой двухъ скоростей: скорости изверженія и орбитальной скорости кометнаго ядра.

Обозначимъ черезъ  $v$  истинную аномалію ядра и черезъ  $q$  его перигельное разстояніе. Пусть, далѣе, согласно общепринятымъ обозначеніямъ,  $g$  есть скорость изверженія и  $G$  — дополненіе до  $180^\circ$  угла, составляемаго этой скоростью съ продолженіемъ радиуса вектора и считаемаго въ сторону убывающихъ  $V$ . Пусть, затѣмъ,  $H$  и  $h$  орбитальныя скорости частицы и ядра въ моментъ изверженія. Проекціи этихъ скоростей на продолженіе радиуса вектора и на ось, перпендикулярную къ этому радиусу и направленную въ ту сторону, куда  $V$  возрастаетъ, будутъ такіа:

$$\begin{aligned} \text{Проекціи } G & \dots -g \cos G \text{ и } -g \sin G, \\ \text{„ } H & \dots R' = \frac{dR}{dt} \text{ и } R \frac{dV}{dt} = \frac{c}{R}, \\ \text{„ } h & \dots r' = \frac{dr}{dt} \text{ и } R \frac{dv}{dt} = \frac{c}{R}, \end{aligned}$$

гдѣ  $c$  есть постоянная площадей движенія кометнаго ядра. Такъ какъ  $H$  есть геометрическая сумма  $G$  и  $h$ , то

$$\begin{aligned} g \cos G &= r' - R' \\ g \sin G &= \frac{c - c}{R} \end{aligned}$$

Отсюда легко найти  $g$  и  $G$ .

Величины производныхъ  $r'$  и  $R'$  можно вычислить по интерполяціонной формулѣ, пользуясь эфемеридами. Для той же цѣли могутъ служить и формулы.

$$r' = \frac{k \sin V}{\sqrt{2q}}, \quad R' = \frac{V f E \sin V}{\sqrt{P}}$$

кромѣ того

$$c = k \sqrt{2q}, \quad C = \sqrt{fP}$$

## V. Сопоставление формулъ.

§ 12. *Опредѣленіе элементовъ.* Первое приближеніе.

$$R = R_0 + R'_0 t + \frac{R''_0}{2} t^2$$

$$f = R_0^2 R''_0 - \frac{2 k^2 q}{R_0}$$

$$t_1 = t - \frac{f t^3}{3 R_0^3}$$

$$t_2 = t_1 - \frac{R'_0 t_1^2}{R_0}$$

$$R = R_0 + R'_0 t_1 + \frac{R''_0}{2} t_1^2 \dots \dots \dots (*)$$

$$w = w_0 + \frac{C}{R_0^2} t_2$$

$$f = R_0^2 R''_0 - \frac{C^2}{R_0} \dots \dots \dots (**)$$

$$P = \frac{C^2}{f}$$

$$t_\pi = -\frac{R'_0}{R''_0} \left( 1 - \frac{f t_\pi^2}{R_0} \right)$$

$$M_\pi = t_0 + t_\pi.$$

За  $t_0$  мы принимаемъ среднее изъ всѣхъ моментовъ наблюденія. При  $t = t_\pi$  формула (\*) даетъ  $R_\pi$ .

$$E = 1 + \frac{P}{R_\pi}.$$

Второе приближеніе.

$$R_\pi^{IV} = -\frac{f^2 E (3E - 1)}{R_\pi^3}, \quad a = -\frac{R_\pi^{IV}}{6} t_\pi^2$$

$$R''_\pi = R''_0 + 3a$$

$$t_\pi = \frac{-R'_0 + a t_\pi}{R''_\pi}$$

$$R_\pi = R_0 - \left( \frac{R''_0}{2} - \frac{a}{4} \right) t_\pi^2$$

$$f = \frac{R_\pi^2 R''_\pi}{E}$$

Это значеніе  $f$  должно совпадать съ тѣмъ, которое получается по формулѣ (\*\*). Для момента  $t_0$  нужно вычислить  $V_0$  (см. слѣд. §) тогда

$$w_\pi = w_0 - V_0.$$

§ 13. *Вычисление эфемериды.*

$$A = \frac{P}{E^2 - 1}, \quad N = \frac{\sqrt{f}}{A^{\frac{1}{2}}} t, \quad x = E - 1.$$

Первое приближение

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = \frac{2N}{E+1}.$$

Второе приближение

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = N - x \operatorname{tg} F$$

$F$  каждый раз определяется по приложенной ниже таблицѣ.

$$\operatorname{tg} \frac{V}{2} = \sqrt{\frac{E-1}{E+1}} \operatorname{tg} \frac{F}{2}$$

$$\sin V = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{V}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}} \quad (\text{см. стр. 13})$$

$$2 \sin^2 \frac{V}{2} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_\pi} - \frac{2E}{P} \sin^2 \frac{V}{2}.$$

Если  $t$ , считаемое здѣсь отъ момента  $M_\pi$ , мало, то

$$n = N \sqrt{\frac{E-1}{(E+1)^3}}$$

$$V = n - \frac{n^3 E}{3x}$$

§ 14. *Вычисление начальной скорости.*

$$c = k \sqrt{2q}$$

$$r' = \frac{k \sin V}{\sqrt{2q}}, \quad R' = \frac{E \sqrt{f} \sin V}{\sqrt{P}}$$

$$g \cos G = r' - R'$$

$$g \sin G = \frac{c - C}{R}$$

Моментъ изверженія определяется изъ сравненія эфемеридъ облака и кометы.

## VI. Примѣненіе формулъ къ кометѣ 1908 с. (Morehouse).

§ 15. Для поясненія всего выше изложеннаго мы примѣнимъ наши формулы къ изученію движенія тѣхъ облаковъ, которыя наблюдались въ хвостѣ кометы Morehouse 15-го, 16-го и 17-го октября 1908 г. Самыя наблюденія мы заимствуемъ изъ статьи К. Д. Покровскаго [Astr. Nachr. № 4393.], а именно:

№	Время *) наблюденія	<i>R</i>	<i>w</i>
1	Окт. 15.294	1.5384	— 76 19.6
2	.306	.5389	19.5
3	.326	.5393	18.2
4	.397	.5404	16.1
5	.398	.5401	15.6
6	.511	.5433	12.8
7	.562	.5438	10.0
8	.571	.5443	9.7
9	.604	.5448	7.8
10	.636	.5454	6.9
11	.683	.5463	2.9
12	16.288	.5615	— 75 39.8
13	.324	.5618	39.4
14	.347	.5619	40.6
15	.353	.5637	38.6
16	.528	.5670	37.9
17	.576	.5691	32.4
18	.678	.5705	28.8
19	.795	.5759	27.5
20	17.157	.5892	16.5
21	.726	.6062	— 74 50.8

Для опредѣленія силы въ первомъ приближеніи мы беремъ слѣдующія наблюденія:

Время наблюденія	<i>R</i>
1908 окт. 15.294	1.5384
15.306	1.5389
16.288	1.5615
16.324	1.5618
17.157	1.5892
17.726	1.6062

Это суть первыя наблюденія 15-го, 16-го и 17-го октября. Взявъ, для увеличенія точности, среднее изъ каждой пары, получаемъ:

\*) Ср. Берл. время.

1908 окт. 15.300	1.5386
16.306	1.5616
17.442	1.5977

Эти данныя даютъ намъ такія уравненія:

$$\begin{aligned} 1.5386 &= R_0 - 0.750 R'_0 + 0.56 \frac{R''_0}{2} \\ 1.5617 &= R_0 + 0.256 R'_0 + 0.07 \frac{R''_0}{2} \\ 1.5977 &= R_0 + 1.392 R'_0 + 1.93 \frac{R''_0}{2} \end{aligned}$$

Время мы считаемъ здѣсь отъ момента средняго изъ всѣхъ моментовъ наблюдений, т. е. за  $t_0$  приняли:

1908 г. окт. 16.050.

Рѣшая написанныя уравненія, получаемъ:

$$\begin{aligned} R_0 &= 1.5550 \\ R'_0 &= 0.0250 \\ R''_0 &= 0.0083 \end{aligned}$$

Далѣе, формула

$$f = R_0^2 R'' - \frac{2k^2 q}{R_0}$$

дастъ намъ:

$$\lg f = 8.294 \text{ и } \mu = -\frac{f}{k^2} = -67$$

Мы увидимъ ниже, что найденное здѣсь значеніе силы мало отличается отъ того, которое даетъ вся совокупность наблюдений.

§ 16. Для опредѣленія силы во второмъ приближеніи мы составляемъ слѣдующую систему уравнений.

$$\begin{aligned} 1.5384 &= R_0 - 0.755 R'_0 + 0.572 \frac{R''_0}{2} \\ 1.5389 &= R_0 - 0.743 \quad 0.554 \\ 1.5393 &= R_0 - 0.723 \quad 0.524 \\ 1.5404 &= R_0 - 0.652 \quad 0.426 \\ 1.5401 &= R_0 - 0.651 \quad 0.425 \\ 1.5433 &= R_0 - 0.539 \quad 0.290 \\ 1.5438 &= R_0 - 0.488 \quad 0.238 \\ 1.5443 &= R_0 - 0.479 \quad 0.229 \\ 1.5448 &= R_0 - 0.446 \quad 0.199 \\ 1.5454 &= R_0 - 0.414 \quad 0.171 \\ 1.5463 &= R_0 - 0.367 \quad 0.135 \\ 1.5615 &= R_0 + 0.238 \quad 0.057 \\ 1.5618 &= R_0 + 0.274 \quad 0.075 \end{aligned}$$

$1.5619 = R_0 + 0.297R'_0$	$+ 0.088\frac{R''_0}{2}$	
$1.5637 = R_0 + 0.303$	$0.092$	
$1.5670 = R_0 + 0.478$	$0.228$	
$1.5691 = R_0 + 0.526$	$0.277$	
$1.5705 = R_0 + 0.627$	$0.394$	
$1.5759 = R_0 + 0.744$	$0.555$	
$1.5892 = R_0 + 1.105$	$1.225$	
$1.6062 = R_0 + 1.668$	$2.809$	
Среднее $1.5568 = R_0 +$	$+ 0.455\frac{R''_0}{2}$	. . . . . (*)

Вычитая среднее изъ каждого уравненія нашей системы, получаемъ:

$- 0.0184 = - 0.755R'_0$	$+ 0.117\frac{R''_0}{2}$	$- 0.0002^*)$
$- 0.0179 = - 0.743$	$+ 0.099$	$+ .0001$
$- 0.0175 = - 0.723$	$+ 0.069$	$+ .0001$
$- 0.0164 = - 0.652$	$- 0.029$	$- .0002$
$- 0.0167 = - 0.651$	$- 0.030$	$- .0005$
$- 0.0135 = - 0.539$	$- 0.165$	$+ .0004$
$- 0.0130 = - 0.488$	$- 0.217$	$- .0001$
$- 0.0125 = - 0.479$	$- 0.226$	$+ .0002$
$- 0.0120 = - 0.446$	$- 0.256$	$.0000$
$- 0.0114 = - 0.414$	$- 0.284$	$- .0001$
$- 0.0105 = - 0.367$	$- 0.320$	$- .0002$
$+ 0.0047 = + 0.238$	$- 0.398$	$+ .0003$
$+ 0.0050 = + 0.274$	$- 0.380$	$- .0003$
$+ 0.0051 = + 0.297$	$- 0.367$	$- .0006$
$+ 0.0069 = + 0.303$	$- 0.363$	$+ .0008$
$+ 0.0102 = + 0.478$	$- 0.227$	$- .0007$
$+ 0.0123 = + 0.526$	$- 0.178$	$.0000$
$+ 0.0137 = + 0.627$	$- 0.061$	$- .0016$
$+ 0.0191 = + 0.744$	$+ 0.100$	$+ .0003$
$+ 0.0324 = + 1.105$	$+ 0.770$	$+ .0022$
$+ 0.0494 = + 1.668$	$+ 2.354$	$- .0008$

Рѣшая эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, находимъ:

$$R'_0 = + 0.02471 \pm 0.00020 \text{ (вѣр. ош.)}$$

$$R''_0 = + 0.00766 \pm 0.00046 \text{ (вѣр. ош.)}$$

Уравненіе (\*) даетъ намъ:

$$R_0 = 1.5551.$$

§ 17. Для опредѣленія  $w_0$  и  $C$  имѣемъ теперь такую систему уравненій

\*) Остающіяся ошибки.

- 76°	19.6 = $w_0 - 0.765 \frac{C}{R_0^2}$	- 0.2*)
	19.5 = - .752	- 0.6
	18.2 = - .732	+ 0.1
	16.1 = - .659	- 0.6
	15.6 = - .658	- 0.3
	12.8 = - .543	- 1.5
	10.0 = - .492	- 0.5
	9.7 = - .482	- 0.6
	7.8 = - .449	+ 0.1
	6.9 = - .417	- 0.1
	2.9 = - .369	+ 2.2
- 75	39.8 = + .237	+ 3.3
	39.4 = + .273	+ 2.4
	40.6 = + .296	+ 0.4
	38.6 = + .301	+ 2.2
	37.9 = + .474	- 3.4
	32.4 = + .521	+ 0.4
	28.8 = + .621	+ 0.4
	27.5 = + .735	- 2.4
	16.5 = + 1.085	- 4.1
- 74	50.8 = + 1.624	+ 2.1

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$\lg C = 8.4057 \quad w_0 = -75^\circ 51.7'.$$

Слѣдовательно, во второмъ приближеніи:

$$f = 0.0181 \pm 0.0011 \text{ (вѣр. ош.)}$$

$$\mu = -61 \pm 4 \text{ (вѣр. ош.)}$$

Вычисленіе  $f$  труднѣе всего; когда  $f$  извѣстно, то элементы получаются уже легко. Мы послѣдовательно находимъ:

$$\lg P = 8.554, \quad \lg R_\pi = 0.18083,$$

$$t_\pi = -3.080, \quad \lg E = 0.01013.$$

Затѣмъ по формуламъ § 8 получаемъ:

$$t_\pi = -3.114, \quad \lg R_\pi = 0.18079,$$

$$R''_\pi = 0.00807, \quad \lg f = 8.258.$$

---

\*) Остающіяся ошибки.

Пользуясь этими данными, мы приходимъ къ слѣдующей системѣ элементовъ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lg f = 8.2580 \\ \lg P = 8.5534 \\ \lg R_{\pi} = 0.18079 \\ w_{\pi} = -77^{\circ} 48'.3 \\ M_{\pi} = 1908 \text{ окт. } 12.936. \end{array} \right.$$

Вмѣсто  $E$  за элементъ удобнѣе взять  $R_{\pi}$ . При вычисленіи эфемериды приходится пользоваться еще слѣдующими величинами :

$$\lg A = 9.8744, \quad \lg E = 0.01012, \quad \lg x = 8.3726.$$

Найденные элементы слѣдующимъ образомъ представляютъ наблюдения :

№	$\Delta \lg R$		$\Delta w$	
	наб.	выч.	наб.	выч.
1	-	0.00005	-	0.1
2	+	.00001	-	0.5
3	+	.00002	+	0.1
4	-	.00006	-	0.4
5	-	.00016		0.0
6	+	.00012	-	1.4
7	-	.00004	-	0.4
8	+	.00004	-	0.4
9		.00000	+	0.3
10	-	.00005		0.0
11	-	.00005	+	2.3
12	+	.00011	+	3.5
13	-	.00007	+	2.6
14	-	.00021	+	0.5
15	+	.00025	+	2.3
16	-	.00020	-	3.2
17		.00000	+	0.5
18	-	.00043	+	0.4
19	+	.00010	-	2.3
20	+	.00060	-	4.0
21	-	.00020	+	2.2

§ 18. Для того, чтобы найти время, когда облако находилось ближе всего къ ядру, мы вычисляемъ  $R$ ,  $w$ ,  $r$  и  $v$  для нѣсколькихъ равноотстоящихъ моментовъ :

1908 октябрь	$r$ комета	$R$ облако	$r-R$	$v$ комета	$w$ облако	$v-w$
14.0	1.5438	1.5209	+ 229	$-77^{\circ} 3'.7$	$-77^{\circ} 7'.9$	+ 4'.2
14.5	1.5377	1.5262	+ 115	$-76 46.6$	$-76 49.1$	+ 2.5
15.0	1.5317	1.5335	- 18	$-76 29.3$	$-76 30.3$	+ 1.0
15.5	1.5250	1.5426	- 176	$-76 11.9$	$-76 11.9$	0.0

По разностямъ  $R-r$  и  $w-v$  мы заключаемъ, что 14.94 октября радиусы векторы кометы и облака были равны, а углы  $w$  и  $v$  отличались всего лишь на 1'.1. Вслѣдствіе этого, за моментъ изверженія облака мы принимаемъ:

1908 окт. 14-го 22<sup>h</sup>5 Ср. Берл. вр.

Соотвѣтственно этому находимъ

$$g = 49 \text{ кил. въ сек.}$$

$$G = 182^{\circ}$$

Такимъ образомъ, кометная матерія была выброшена съ большой скоростью въ сторону, почти прямо противоположную солнцу.

§ 19. Хорошее согласіе вычисленій съ наблюденіями и приближеніе облака къ ядру указываютъ на справедливость сдѣланныхъ нами гипотезъ (§ 1.). Эти гипотезы составляютъ основанія Бредихинской теоріи кометныхъ хвостовъ; мы находимъ, такимъ образомъ, новое подтвержденіе этой теоріи.

Наши элементы представляютъ движеніе всей массы облаковъ, наблюдавшихся въ хвостѣ кометы Morehouse 15-го, 16-го и 17-го октября 1908 г. Какъ извѣстно, въ эти дни въ хвостѣ рѣзко выдѣлялись два облака; было бы весьма желательно изслѣдовать движеніе каждаго облака въ отдѣльности. Къ сожалѣнію, наблюдательный матеріалъ до сихъ поръ еще не опубликованъ.

## Таблица для рѣшенія уравненія

$$\operatorname{tg} F + \ln \operatorname{tg} \left( 45 + \frac{F}{2} \right) = N_0.$$

<i>F</i>	<i>lg N<sub>0</sub></i>	<i>F</i>	<i>lg N<sub>0</sub></i>	<i>F</i>	<i>lg N<sub>0</sub></i>	<i>F</i>	<i>lg N<sub>0</sub></i>	<i>F</i>	<i>lg N<sub>0</sub></i>
15 <sup>0</sup> 0	9.7266	25 <sup>0</sup> 0	9.9625	35 <sup>0</sup> 0	0.1313	45 <sup>0</sup> 0	0.2745	55 <sup>0</sup> 0	0.4120
10	9.7315	10	9.9656	10	0.1338	10	0.2768	10	0.4144
20	9.7364	20	9.9688	20	0.1364	20	0.2791	20	0.4167
30	9.7413	30	9.9720	30	0.1389	30	0.2813	30	0.4191
40	9.7461	40	9.9751	40	0.1414	40	0.2836	40	0.4214
50	9.7509	50	9.9782	50	0.1439	50	0.2859	50	0.4238
16 0	9.7557	26 0	9.9813	36 0	0.1464	46 0	0.2882	56 0	0.4261
10	9.7603	10	9.9844	10	0.1489	10	0.2905	10	0.4285
20	9.7650	20	9.9875	20	0.1514	20	0.2928	20	0.4309
30	9.7696	30	9.9906	30	0.1538	30	0.2951	30	0.4332
40	9.7741	40	9.9936	40	0.1563	40	0.2973	40	0.4356
50	9.7786	50	9.9967	50	0.1588	50	0.2996	50	0.4380
17 0	9.7831	27 0	9.9997	37 0	0.1612	47 0	0.3019	57 0	0.4404
10	9.7875	10	0.0027	10	0.1637	10	0.3042	10	0.4428
20	9.7919	20	0.0057	20	0.1661	20	0.3065	20	0.4451
30	9.7963	30	0.0086	30	0.1686	30	0.3087	30	0.4475
40	9.8006	40	0.0116	40	0.1710	40	0.3110	40	0.4499
50	9.8049	50	0.0146	50	0.1735	50	0.3133	50	0.4524
18 0	9.8091	28 0	0.0175	38 0	0.1759	48 0	0.3156	58 0	0.4548
10	9.8134	10	0.0204	10	0.1783	10	0.3178	10	0.4572
20	9.8175	20	0.0233	20	0.1807	20	0.3201	20	0.4596
30	9.8217	30	0.0262	30	0.1831	30	0.3224	30	0.4620
40	9.8258	40	0.0291	40	0.1855	40	0.3247	40	0.4645
50	9.8299	50	0.0320	50	0.1880	50	0.3270	50	0.4669
19 0	9.8339	29 0	0.0349	39 0	0.1904	49 0	0.3292	59 0	0.4694
10	9.8379	10	0.0377	10	0.1927	10	0.3315	10	0.4718
20	9.8419	20	0.0405	20	0.1951	20	0.3338	20	0.4743
30	9.8459	30	0.0434	30	0.1975	30	0.3361	30	0.4767
40	9.8498	40	0.0462	40	0.1999	40	0.3383	40	0.4792
50	9.8537	50	0.0490	50	0.2023	50	0.3406	50	0.4817
20 0	9.8575	30 0	0.0518	40 0	0.2047	50 0	0.3429	60 0	0.4842
10	9.8614	10	0.0546	10	0.2070	10	0.3452	10	0.4867
20	9.8652	20	0.0574	20	0.2094	20	0.3475	20	0.4891
30	9.8690	30	0.0601	30	0.2118	30	0.3497	30	0.4916
40	9.8727	40	0.0629	40	0.2141	40	0.3520	40	0.4942
50	9.8765	50	0.0656	50	0.2165	50	0.3543	50	0.4967
21 0	9.8802	31 0	0.0683	41 0	0.2188	51 0	0.3566	61 0	0.4992
10	9.8839	10	0.0711	10	0.2212	10	0.3589	10	0.5017
20	9.8875	20	0.0738	20	0.2235	20	0.3612	20	0.5043
30	9.8911	30	0.0765	30	0.2259	30	0.3635	30	0.5068
40	9.8947	40	0.0792	40	0.2282	40	0.3658	40	0.5094
50	9.8983	50	0.0819	50	0.2306	50	0.3681	50	0.5119
22 0	9.9019	32 0	0.0845	42 0	0.2329	52 0	0.3703	62 0	0.5145
10	9.9054	10	0.0872	10	0.2352	10	0.3726	10	0.5171
20	9.9089	20	0.0899	20	0.2375	20	0.3749	20	0.5197
30	9.9124	30	0.0925	30	0.2399	30	0.3772	30	0.5223
40	9.9159	40	0.0952	40	0.2422	40	0.3795	40	0.5249
50	9.9194	50	0.0978	50	0.2445	50	0.3818	50	0.5275
23 0	9.9228	33 0	0.1004	43 0	0.2468	53 0	0.3842	63 0	0.5301
10	9.9262	10	0.1030	10	0.2491	10	0.3865	10	0.5328
20	9.9296	20	0.1056	20	0.2515	20	0.3888	20	0.5354
30	9.9330	30	0.1082	30	0.2538	30	0.3911	30	0.5381
40	9.9363	40	0.1108	40	0.2561	40	0.3934	40	0.5407
50	9.9396	50	0.1134	50	0.2584	50	0.3957	50	0.5434
24 0	9.9430	34 0	0.1160	44 0	0.2607	54 0	0.3980	64 0	0.5461
10	9.9463	10	0.1186	10	0.2630	10	0.4004	10	0.5488
20	9.9495	20	0.1211	20	0.2653	20	0.4027	20	0.5515
30	9.9528	30	0.1237	30	0.2676	30	0.4050	30	0.5542
40	9.9560	40	0.1262	40	0.2699	40	0.4073	40	0.5569
50	9.9593	50	0.1288	50	0.2722	50	0.4097	80	0.5597
25 0	9.9625	35 0	0.1313	45 0	0.2745	55 0	0.4120	65 0	0.5624

### Пропорциональные части.

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	1
2	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0	2
3	6.0	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	3
4	8.0	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.0	4
5	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	5
6	12.0	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.0	6
7	14.0	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.0	7
8	16.0	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.0	8
9	18.0	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.0	9

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	1
2	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	2
3	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.0	3
4	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.0	4
5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.0	5
6	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.0	6
7	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.0	7
8	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.0	8
9	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.0	9

	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	1
2	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.0	2
3	12.0	12.3	12.6	12.9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.0	3
4	16.0	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.0	4
5	20.0	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.0	5
6	24.0	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.0	6
7	28.0	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.0	7
8	32.0	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.0	8
9	36.0	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.0	9