

Die Nullpunktsenergie als Quelle der Strahlung der weissen Zwerge

von A. Kipper

In dem Anz. d. Akad. d. Wiss. Wien 70 hat A. H a a s vermutet, dass zwischen der Strahlungsproduktion der Sterne und der Rotverschiebung der Spiralnebel ein ursächlicher Zusammenhang besteht. Die mittlere Strahlungsdichte im Weltall beträgt etwa $3 \cdot 10^{-15}$ Erg pro cm^3 . Da andererseits die mittlere Massendichte ungefähr 10^{-30} g. pro cm^3 ist, so kommt im Durchschnitt auf 1 g. Materie ein Betrag an strahlender Energie von ungefähr $3 \cdot 10^{15}$ Erg. Infolge der fortschreitenden Rotverschiebung vermindert sich dieser Betrag nach A. H a a s um $1/10$ Erg. Im Falle des Andromeda-Nebels findet man nun eine totale Energieausstrahlung von $2 \cdot 10^{42}$ Erg pro Sekunde, während seine Masse auf 10^{43} g. geschätzt wird. Der Andromeda-Nebel produziert demnach grössenordnungsmässig tatsächlich etwa $1/10$ Erg pro Gramm und Sekunde. Aus diesen Zahlen schliesst Haas, dass die durch die Rotverschiebung bedingte ständige Verminderung der Strahlungsenergie im Weltall durch die Neuausstrahlung der Sterne kompensiert wird. Die Energieproduktion der Sterne ist also genau der Expansion des Weltalls angepasst.

Aus der Rotverschiebung der Nebelspektren müssen wir schliessen, dass alle Lichtquanten während ihrer Lebenszeit eine ständige Verminderung ihrer Frequenz und somit auch ihrer Energie vom Betrage $1,6 \cdot 10^{-17}$ pro Sekunde erfahren. Wenn wir die Rotverschiebung der Spiralnebel nicht durch den Dopplereffekt deuten, so scheint das durch die atomaren Prozesse frei werdende Lichtquant seinerseits strahlungsfähig zu sein.

Es liegt der Gedanke nahe, auch für andere stabile Energiegebilde eine solche säkulare Energieverminderung von $1,6 \cdot 10^{-17}$ Teil der Energie pro Sekunde zu erwarten. So stellt z. B. ein Atom in seinem Grundzustand ein stabiles Gebilde dar. Das Atom vermag

im Grundzustand bekanntlich nicht zu strahlen. Nach unserer Vermutung ist aber zu erwarten, dass es doch auf Kosten seiner im atomtheoretischen Sinne nicht ausstrahlungsfähigen Energie (sg. Nullpunktsenergie) Licht emittieren wird, und zwar pro Sekunde $1,6 \cdot 10^{-17}$ der Nullpunktsenergie. In der Natur findet man Atome im Grundzustand z. B. in der Erdkruste. Wenn man aber das Strahlungsvermögen der Erde nach besagter Hypothese abschätzt, so findet man Energiebeträge, die zu klein sind, um bemerkbar zu sein. *)

Es gibt aber doch eine Möglichkeit, unsere Hypothese zu prüfen, und zwar an den weissen Zwergen. Durch die Untersuchungen von Fowler¹⁾, Milne²⁾, und Chandrasekhar³⁾ ist es weitgehend erklärt worden, dass sich die Materie in den weissen Zwergen in sog. nicht-relativistisch entartetem Zustand befindet. Die Fermische Theorie der Gasentartung lehrt, dass eine dichte Gaskugel sich nach aussen hin wie ein Körper in der Nähe der absoluten Nulltemperatur verhält. Streng genommen ist es in einem derartigen Fall überhaupt sinnlos, von einer Temperatur der Sternmaterie zu sprechen. Es ist Sache des persönlichen Geschmacks, ob man einen solchen Stern als sehr heiss oder sehr kalt betrachten will. Im ganzen genommen verhält er sich wie ein Atom im Grundzustand, das ja auch keine Energie mehr ausstrahlen kann. Dieses kolossale „Atom“ besitzt auch die Nullpunktsenergie, die aus der kinetischen Energie der Gasteilchen besteht, jedoch wegen des Pauli-Verbotens nicht in Strahlung verwandelt werden kann. Da aber die weissen Zwerge so viel Licht aussenden, dass sie in der Entfernung von mehreren Lichtjahren beobachtbar sind, so wird gefolgert, dass sie den Zustand eines idealen weissen Zwerges noch nicht erreicht haben.

Im Gegensatz zur letzten Auffassung möchte ich hier eine Hypothese aufstellen, nach der die weissen Zwerge sich schon im Stadium der absoluten Null befinden, während die Lichtemission auf Kosten ihrer Nullpunktsenergie erfolgt. Wie die folgende Rechnung zeigt, beträgt für die zwei am besten bekannten Zwergsterne α^2 Eridani und Sirius B die Lichtemission pro Sekunde etwa $\cdot 10^{-17}$ der Nullpunktsenergie dieser Sterne. Es ist also grössenordnungs-

*) Dies gilt allgemein nur für leichte Elemente. Für die Atome mit grosser Elektronenzahl ist die Abschätzung der Nullpunktsenergie sehr schwer.

mässig derselbe Betrag, wie die aus der Rotverschiebung der Spiralnebel gefundene säkulare Energieverminderung des Lichtquants. Verf. glaubt, dass eine so gute Übereinstimmung der Zahlen nicht durch einen Zufall bedingt sein kann. Vielmehr ist anzunehmen, dass durch die aufgestellte Hypothese die Energiequelle der weissen Zwerge oder auch der gewöhnlichen Sterne gefunden ist.

Indem wir zur Berechnung der Nullpunktsenergie eines weissen Zwerges schreiten, nehmen wir an, dass die mechanischen Kräfte zwischen den Gasparkeln ausserhalb der kurzen Stosszeiten verschwindend klein sind. Die Sternmaterie bestehe aus einem Gemisch von Elektronen und Atomkernen, so dass die negative Ladung der ersteren durch die letztere kompensiert wird. Bei gewöhnlicher chemischer Zusammensetzung des Sternes wird die Zahl der Elektronen mehr als ums Zehnfache diejenige der Atomkerne übertreffen, so dass die Gesamtanzahl der Gasparkeln praktisch gleich der Anzahl N_e der Elektronen ist. Wir können also die Sternmaterie als ein nur aus Elektronen bestehendes Gas betrachten. Es sei unsere Aufgabe, die gesamte kinetische Energie dieser Elektronen bei der absoluten Temperatur Null zu berechnen.

Es seien p_x, p_y, p_z die Impulskomponenten und x, y, z , die Koordinaten eines Elektrons. Nach der Heisenbergschen Unge-nauigkeitsrelation können wir die Impulse und die Koordinaten gleichzeitig bis auf die Schärfe

$$\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot = h^3 \quad \dots \quad (1)$$

angeben. Betrachtet man den Stern als ein Ganzes, so ist die Heisenbergsche Relation in der Form

$$\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z = \frac{h^3}{V} \quad \dots \quad (2)$$

zu schreiben, wobei

$$V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

das Volumen des Sternes bedeutet. Also können wir die Impulse beliebiger zwei Elektronen in dem Stern als verschieden betrachten, wenn sie die Relation (2) erfüllen. Nach Fermi können in einem Elektronengas nur zwei Elektronen die gleichen Impulse (gleiche Quantenzahlen) haben. Teilen wir den Impulsraum (p_x, p_y, p_z) in die Zellen von der Grösse

$$\frac{h^3}{V},$$

so bedeutet die Fermische Forderung, dass in jeder Zelle nur zwei Impulspunkte der Elektronen enthalten sein können. Beim absoluten Nullpunkt wird in einem Fermischen Gase diejenige Verteilung eintreten, welche die kleinste mit vorgegebener Teilchenzahl N_e mögliche Energie besitzt. Offenbar müssen dann bis zu einem gewissen maximalen Impulswert

$$p_0 = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2}$$

die Zellen in dem Impulsraume mit je zwei Impulspunkten der Elektronen besetzt sein, und oberhalb von p_0 müssen alle Zellen leer sein. Der von Impulspunkten besetzte Impulsraum hat offenbar die Gestalt einer Kugel mit dem Rauminhalt

$$\frac{4}{3} \pi p_0^3 \dots \dots \dots (3)$$

und die Anzahl der Zellen ist demnach

$$\frac{4 \pi V}{3h^3} p_0^3 \dots \dots \dots (4)$$

Da eine jede Zelle nur zwei Impulspunkte der Elektronen enthalten kann, ist die Gesamtanzahl der Elektronen durch die Gleichung

$$N_e = \frac{8 \pi V}{3h^3} p_0^3 \dots \dots \dots (5)$$

gegeben. Ebenso folgt, dass die Zahl $N_e(p)$ der Elektronen mit Impulsen unter p

$$N_e(p) = \frac{8 \pi V}{3h^3} p^3, \quad p \leq p_0 \dots \dots \dots (6)$$

ist. Die Gleichungen (5) und (6) zeigen die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Fall deren vollkommenen Entartung und treten also an der Stelle des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes, das bei einem normalen Gase gültig ist.

Aus (6) folgt für die Anzahl der Elektronen mit Impulsen zwischen p und $p + dp$

$$dN_e(p) = \frac{8 \pi V}{h^3} p^2 \cdot dp \dots \dots \dots (7)$$

Andererseits ist die kinetische Energie U eines Elektrons durch die Formel

$$U = \frac{1}{2m_e} p^2 \dots \dots \dots (8)$$

gegeben, wobei m_e die Masse des Elektrons bedeutet. Die summäre kinetische Energie der Elektronen mit Impulsen zwischen p und $p + dp$ kann nach (7) und (8) folgenderweise gefunden werden:

$$\begin{aligned} dE_e &= U \cdot dN(p) = \frac{1}{2m_e} p^2 \cdot \frac{8 \pi V}{h^3} p^2 \cdot dp = \\ &= \frac{4 \pi V}{m_e h^3} p^4 \cdot dp \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

Durch Integration von (9) erhalten wir die gesamte kinetische Energie der im Volumen V befindlichen Elektronen.

$$E_e = \frac{4 \pi V}{m_e h^3} \int_0^{p_0} p^4 \cdot dp = \frac{4 \pi V}{5 \cdot m_e \cdot h^3} p_0^5 \dots \dots (10)$$

Aus (10) und (5) lässt sich p_0 eliminieren, womit die Relation

$$E_e = \frac{h^2 \cdot 3^{\frac{5}{3}}}{40 \cdot \pi^{\frac{2}{3}} m_e} \left(\frac{N_e}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \cdot V \dots \dots \dots (11)$$

gefunden wird.

Es sei M die Masse und ρ die Dichte des Sternes. Wird noch das effektive Molekulargewicht μ des aus Elektronen und Atomkernen bestehenden Gases eingeführt, so können wir schreiben

$$\frac{N_e}{V} = \frac{M}{m_H \cdot \mu \cdot V} = \frac{\rho}{m_H \cdot \mu}, \dots \dots \dots (12)$$

wobei m_H die Masse des Wasserstoffatoms bedeutet. Indem wir noch

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \dots \dots \dots (13)$$

setzen, lässt sich (11) in der Gestalt

$$E_e = \frac{h^2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}}{10 \cdot m_e \cdot m_H^{\frac{5}{3}} \cdot \mu^{\frac{5}{3}}} \rho^{\frac{5}{3}} \cdot R^3 \dots \dots \dots (14)$$

schreiben. Setzt man die numerischen Werte der Atomkonstanten in die letzte Gleichung ein, so ist

$$E_e = 1,35 \cdot 10^{13} \cdot \varrho^{\frac{5}{3}} \cdot R^3$$

oder in logarithmischer Form

$$\log E = 13,13 + \frac{5}{3} \log \varrho + 3 \cdot \log R, \dots \dots (15)$$

wobei $\mu = 2,5$ gesetzt ist.

Andererseits lässt sich aus der absoluten visuellen Helligkeit und dem Farbenindex der Radius des Sternes mittels der Formel

$$3 \log R = 1,71 c - 0,6 M_v + 34,74 \dots \dots (16)$$

(R in cm.)

berechnen, wobei c der Farbenindex und M_v die visuelle absolute Helligkeit des Sternes bedeuten. *) Also können wir, indem wir in (15) für $\log R$ dessen Wert aus (16) einsetzen, schreiben

$$\log E = 1,67 \cdot \log \varrho + 1,71 \cdot c - 0,6 \cdot M_v + 47,87 \dots \dots (17)$$

Wenn M_b die absolute bolometrische Helligkeit des Sternes bedeutet, so ist die pro Sekunde ausgestrahlte Energie L in Erg durch die Formel

$$\log L = 35,52 - 0,4 M_b \dots \dots (18)$$

gegeben. Indem wir noch die Grösse $\log L - \log E$ mit κ bezeichnen, erhalten wir aus (17) und (18)

$$\kappa = 0,6 M_v - 0,4 M_b - 1,67 \log \varrho - 1,71 c - 12,35 \dots \dots (19)$$

Die letzte Formel gibt uns die Möglichkeit, die in dieser Arbeit aufgestellte Hypothese zu prüfen. Die Grösse κ ist nämlich nichts anderes als der Logarithmus von L/E , wobei L die pro Sekunde ausgestrahlte Energie und E die Nullpunktenergie des Sternes bedeutet. Sind also für einen weissen Zwerg M_v , M_b , und ϱ bekannt, so können wir die Grösse κ berechnen. Zur Zeit sind drei weisse Zwerge σ^2 Eridani, Sirius B und A. C. + 70° 8247 bekannt, in denen die Materie sicher in degeneriertem Zustand befindet. Die besten Daten für σ^2 Eridani und Sirius B sind in der schon genannten Arbeit von

*) Wegen dieser Formel siehe: J. Gabovitš and E. Öpik The Densities of Visual Binary Stars. Publ. Obs. Tartu XXVIII 3. Die dort gegebenen Gleichungen (4), (5), (6) und (7) lassen sich nach einigen Umformungen in der obengeschriebenen Gestalt darstellen.

J. Gabovitš und E. Öpik zu finden ⁴⁾. Wir entnehmen ihr die folgenden Zahlen.

o^2 Eridani	Sirius B
$\rho = 4,5 \cdot 10^4 \text{ g./cm}^3.$	$\rho = 4,4 \cdot 10^3 \text{ g./cm}^3.$
$M_v = 11,1$	$M_v = 9,8$
$M_b = 10,4$	$M_b = 9,7$
$c = -0,17$	$c = 0,16.$

Für A. C. +70° 8247 finden wir aus Publ. Obs. Tartu XXX Nr. 1 S. 47 die Zahlen

A. C. +70° 8247	
ρ	$= 7 \cdot 10^4 \text{ g./cm}^3.$
M_v	$= 12,6$
M_b	$= 11,9$
c	$= -0,41.$

Indem die angegebenen Werte von M_v , M_b und ρ in die Formel (19) eingesetzt werden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \kappa &= -17,29 \text{ für } o^2 \text{ Eridani,} \\ \kappa &= -16,69 \text{ für Sirius B, und} \\ \kappa &= -16,92 \text{ für A. C. +70° 8247.} \end{aligned}$$

Der Mittelwert aus diesen Werten von κ ist

$$\kappa = -16,99$$

Wie schon vorhin erwähnt, muss aber nach der Rotverschiebung der Spiralnebel $L/E = 1,6 \cdot 10^{-17}$, d. h. $\kappa = \log L/E = -16,8$ sein. Also ist die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte von κ überraschend gut. Leider sind die genauen Dichten nur für die drei obenerwähnten weissen Zwerge bekannt, sodass die Prüfungsmöglichkeit der aufgestellten Hypothese zur Zeit noch beschränkt ist. Die gute Übereinstimmung der Zahlen lässt aber hoffen, dass in der ausgesprochenen Vermutung doch etwas Wahres enthalten ist.

Literaturverzeichnis.

1. R. H. Fowler M. N. 87 (1926), S. 114.
2. E. A. Milne M. N. 91 (1930), S. 4.
3. S. Chandrasekhar Z. f. Astroph. 3 (1931), S. 302;
M. N. 95 (1935), S. 207.
4. J. Gabovitš und E. Öpik, Publ. Obs. Tartu XXVIII₃.