V. Über die Partikeldurchmesserverteilung in der interstellaren Materie [1].

Von G. Kusmin.

Wie aus der Statistik der Sternschnuppen folgt, wächst deren Anzahl nach dem d^k-Gesetz an[2] (d — Durchmesser, k — beinahe konstant). Wir können nun (nach Öpik[2]) annehmen, dass solch ein Anwachsen nach dem d^k-Gesetze sich bis zu sehr kleinen, schon absorbierend wirkenden Partikeln der interstellaren Materie erstrecken muss, und dass dieses Gesetz nicht nur in der Sonnenumgebung, sondern auch im ganzen interstellaren Raume mit durchschnittlich derselben Konstante k seine Geltung bewahrt. Die folgenden elementaren Berechnungen zeigen, dass die Beobachtungsergebnisse über die interstellare Absorption dieser Annahme jedenfalls nicht widersprechen.

Wir berechnen auf Grund der Anzahl der sporadischen (interstellaren) Sternschnuppen in cm³, von dem d^k-Gesetz ausgehend, die allgemeine photographische Absorption. Dazu benutzen wir die in der vorhergehenden Abhandlung vom Verfasser gegebene Formel von Öpik (Seite 17), die gerade für die d^k-Durchmesserverteilung abgeleitet ist. Der Proportionalitätsfaktor in dieser Formel ist der folgende:

$$2.5 \log e \, \frac{\pi}{4} \, cH,$$

wo c den Proportionalitätsfaktor des d^k-Gesetzes und H die Länge des Lichtweges in dem absorbierenden Medium bedeutet.

---

[1] Astrophysikalisches Seminar 1936/37, geleitet von E. Öpik.

[2] E. Öpik, H. C. **359**, 7 (1931).

Wir nehmen $H = 1$ kpc $= 3.1 \times 10^{21}$ cm an, den Faktor c berechnen wir aus der Anzahl der sporadischen Sternschnuppen:

$$A = c \int_{d_0}^{\infty} d^k \, dd \text{ pro cm}^3.$$

d_0 ist hier die untere Durchmessergrenze der in Betracht genommenen Sternschnuppen. Wenn wir $d_0 = 0.1$ cm wählen, so ist rund $A = 10^{-24}$ pro cm^3, welche Zahl grössenordnungsgemäss als Mittelwert für den interstellaren Raum zu betrachten ist (Schätzung von E. Öpik, dem Verfasser mitgeteilt). Für k nehmen wir verschiedene Werte zwischen -3.3 (teleskopische Sternschnuppen) und -4.5 (helle Sternschnuppen) an[2]. Weiter setzen wir $\lambda = 440$ $\mu\mu = 0.44 \times 10^{-4}$ cm an, wonach wir den Wert von λ^p ($p = k + 3$) berechnen. Das Verhältnis des effektiven Querschnittes der Partikeln zum wahren, ω, ist bekanntlich im Falle der kleinen y bei nichtabsorbierenden Partikeln $\sim y^4$ und bei absorbierenden $\sim y$ $\left(y = \frac{d}{\lambda}\right)$. Als Proportionalitätsfaktoren benutzen wir runde Werte, im ersten Falle 10 und im zweiten 3. Diese Werte erhalten wir aus den bekannten Formeln von Mie[3], wenn wir im ersten Falle den Brechungsexponenten gleich 1.3, und im zweiten gleich $1.5 - 3i$ ansetzen. Bei grösserem y wächst ω mehr oder weniger über 1 und bei weiterem Anwachsen von y rückt ω zu 1 asymptotisch zurück[4]. Dementsprechend setzen wir schematisch $\omega = 10\,y^4$ resp. $3y$, wenn $y < 0.6$ resp. 0.4, und $\omega = 1.5$, wenn $y > 0.6$ resp. 0.4 ist. Tabelle 1 enthält die Ergebnisse der Berechnungen für verschiedene k (I — nichtabsorbierende Partikeln, II — absorbierende Partikeln).

Tabelle 1.

Berechnete Werte der interstellaren Absorption pro kpc (photographisch), von der beobachteten Sternschnuppenhäufigkeit ausgehend.

k	-3.7	-3.8	-3.9	-4.0	-4.1	-4.2	-4.3
I	$0^m.06$	$0^m.12$	$0^m.26$	$0^m.56$	$1^m.3$	$2^m.9$	$6^m.5$
II	$0^m.17$	$0^m.45$	$1^m.3$	$4^m.0$	13^m	43^m	150^m

[3] Vgl. Ann. d. Phys., Fussn. 7 des vorhergehenden Aufsatzes.

[4] Rechenfehler in H. C. **359**: Tab. III, ω mit 70 zu dividieren

Im Falle der absorbierenden Partikeln ist hier als untere Grenze der Integration $y = 10^{-3}$ benutzt (welcher Wert etwa dem Durchmesser der Moleküle entspricht), statt $y = 0$ in der Formel von Öpik. Bei nichtabsorbierenden Partikeln spielt die Wahl der unteren Grenze keine wesentliche Rolle.

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, kann man die auf stellarstatistischem Wege geschätzten Werte der allgemeinen Absorption im interstellaren Raume (von der Grössenordnung 1^m pro kpc) wohl durch die d^k-Verteilungshypothese erklären, und zwar bei nichtabsorbierenden Partikeln durch $k = -4.0$ bis -4.2 und bei absorbierenden Partikeln durch $k = -3.8$ bis -4.0. Die Wirkung der nichtabsorbierenden Partikeln ist, wie diese Tabelle zeigt, beträchtlich kleiner als die Wirkung der absorbierenden Partikeln. Dementsprechend sind in der Tabelle 2 die Werte der Absorption für verschiedene Mischungen der absorbierenden und nichtabsorbierenden Partikeln dargestellt. In dieser Tabelle ist der Anteil der absorbierenden (metallischen) Partikeln in zwei Fällen kleiner als derjenige der nichtabsorbierenden (Mineralstaub) angenommen, was wahrscheinlich der Wirklichkeit entspricht, wie das die Erforschung der Sternschnuppen auch ahnen lässt.

Tabelle 2.

Photographische Absorption pro kpc, für verschiedene Mischungsverhältnisse absorbierender und nichtabsorbierender Partikeln.

Anteil der absorb. Partikeln	k						
	—3.7	—3.8	—3.9	—4.0	—4.1	—4.2	—4.3
1/2	$0^m.11$	$0^m.28$	$0^m.8$	$2^m.3$	7^m	23^m	80^m
1/5	$0^m.08$	$0^m.19$	$0^m.47$	$1^m.2$	$3^m.6$	11^m	35^m
1/10	$0^m.07$	$0^m.15$	$0^m.36$	$0^m.9$	$2^m.5$	7^m	21^m

Das Gesetz und der Betrag der Verfärbung der Absorption entsprechen bei der d^k-Verteilung auch ziemlich genau der Wirklichkeit. Bei nichtabsorbierenden Partikeln muss die Absorption nämlich auf Grund der Formel von Öpik nach dem Gesetze $\sim \lambda^p$ mit $p = k + 3$ vor sich gehen (wenn die optischen Konstanten der Partikeln sich wenig mit dem Durchmesser und der Wellenlänge ändern). Nehmen wir $k = -4$, welcher Wert für verschiedene Mischungen der absorbierenden und nichtabsorbierenden Partikeln die Absorption von $0^m.56$ bis $4^m.0$ pro kpc fordert (Tabellen 1 u. 2), so ist das Verfärbungsgesetz des nichtabsorbierenden Anteils $\sim \lambda^{-1}$. Dieses Gesetz stimmt mit der beobachteten Verfärbung der Absorption mit der Wellenlänge, die in Abb. 1 u. 2 der vorgehenden Abhandlung vom Verfasser gegeben ist, ziemlich gut überein. Die totale Krümmung der Beobachtungskurve unterscheidet sich nur wenig von der theoretischen Krümmung, welche etwas zu gross erscheint (das Gesetz $\sim \lambda^{-0.7}$ stimmt besser mit den Beobachtungen überein, siehe Abb. 3 jener Abhandlung). Die allgemeine Absorption (λ 440 $\mu\mu$) im Vergleich zur selektiven ($\lambda\lambda$ 440, 550 $\mu\mu$) ist für das Gesetz $\sim \lambda^p$ in Tabelle 3 (I) für verschiedene k gegeben. Es variiert bei den betrachteten Werten von k $(=p-3)$, wie die Tabelle zeigt, zwischen 4 und 6.

Bei den absorbierenden Partikeln ist das Gesetz $\sim \lambda^p$ für $-1 < p < -0.7$ wegen des Vorhandenseins einer unteren Grenze der Partikeldurchmesser nicht ganz genau, da im Falle der absorbierenden Partikeln bei solchen Werten von p das Integral in Öpiks Formel sehr langsam konvergiert. Genauer ist das Gesetz:

$$a\,\lambda^p - b\,\lambda^{-1},$$

wo das zweite Glied das Fehlen von sehr kleinen Partikeln (kleiner als Moleküle) bedeutet. Bei $p \leqslant -1$ $(k \leqslant -4)$ ist aber im Falle von absorbierenden Partikeln das Integral überhaupt nicht konvergent. In diesem Falle ist die Annahme einer unteren Durchmessergrenze unbedingt nötig. Bei $p = -1$ muss, wie nicht schwer zu ersehen ist, das folgende Gesetz gelten:

$$(b_1 + a_1 \log \lambda)\,\lambda^{-1},$$

bei $p < -1$ aber:

$$b\,\lambda^{-1} - a\,\lambda^p\,.$$

Die Übereinstimmung zwischen den Kurven der oben gegebenen Gesetze für absorbierende Partikeln und der Beobachtungskurve ist noch grösser als bei dem $\sim \lambda^p$-Gesetz mit $p \approx -1$ (nichtabsorbierende Partikeln); sie ist durch eine kleinere Krümmung der Kurven bei Berechnungen nach diesen Gesetzen bedingt, was besser den Beobachtungen entspricht. Jedoch ist auch hier die theoretische Kurve etwas zu sehr gekrümmt. Tabelle 3 (II) bietet für die absorbierenden Partikeln die allgemeine Absorption im Verhältnis zur selektiven und ausserdem Angaben über die

Parameter der Absorptionsgesetze (für λ in μ-Einheiten). Aus der Tabelle ersehen wir, dass das Verhältnis der allgemeinen Absorption zur selektiven bei beiden Arten von Partikeln fast dasselbe ist; bei absorbierenden Partikeln ist die allgemeine Absorption relativ etwas grösser und variiert zwischen 5 und $6^1/_2$.

Tabelle 3.

Verhältnis der photographischen Absorption zur selektiven: I, nichtabsorbierende; II, absorbierende Partikeln.

k	—3.8	—3.9	—4.0	—4.1	—4.2
I	6.1	5.5	5.0	4.6	4.2
II	6.5	6.0	5.7	5.5	5.3
b/a	0.20	0.45	(1.00)	2.2	5.0
b_1/a_1	—	—	3.5 [5]	—	—

Im Falle einer grossen Veränderung der optischen Konstanten der Partikeln kann der Betrag der Verfärbung ganz anders erscheinen und die selektive Absorption mehr oder weniger von den berechneten Beträgen von $^1/_4 - ^1/_6$ der allgemeinen Absorption sich unterscheiden. Fast alle gemessenen Metalle liefern eine grössere selektive Absorption. Tabelle 4 stellt die allgemeine Absorption im Vergleich zur selektiven für einige Metalle dar. Diese Angaben sind bei $k = -3^2/_3$ auf Grund der in der vorhergehenden Abhandlung erwähnten numerischen Integration, und für $k = -4^1/_2$ auf Grund der Berechnungen nach der Formel für sehr kleine absorbierende Partikeln gegeben (das Absorptionsgesetz bei $k = -4^1/_2$ unterscheidet sich nur wenig von demjenigen bei sehr kleinen Partikeln, denn die relative Wirkung der grösseren Partikeln ist bei diesem k schon verschwindend klein).

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, erweist sich die allgemeine Absorption im Verhältnis zur selektiven wegen der Veränderung der optischen Konstanten von 2 bis 3 mal kleiner als bei unveränderlichen Konstanten. Die Anwesenheit von Partikeln mit veränderlichen optischen Konstanten kann also

[5] Für Log_{10}.

die selektive Absorption verhältnismässig beträchtlich vergrössern. Eine solche grössere Verfärbung kann noch besser den Beobachtungstatsachen entsprechen.

Tabelle 4.

Verhältnis der photographischen Absorption zur selektiven für Metalle.

Metall	k $-3^2/_3$	k $-4^1/_2$
Galvanisch zerstäubtes Eisen	5.5	3.0
Elektrolytischer Nickel	4.0	2.1
Massives Kupfer	3.8	1.9
Massiver Stahl	—	2.0
Unveränderliche optische Konstanten	>7	5.0

Wir sehen also, dass unsere Hypothese über die Verteilung der Partikeldurchmesser in ganz gutem Einklang mit den Beobachtungen der allgemeinen und selektiven Absorption steht. Die etwas kleinere Krümmung der beobachteten Absorptionskurve kann man leicht durch ein kleineres k bei feineren Partikeln oder durch eine Veränderung der opt. Konstanten erklären (von den Ursachen der wellenförmigen Besonderheit in der Kurve ist schon in der ersten Abhandlung die Rede gewesen). Jedenfalls lässt die beobachtete Anzahl der Sternschnuppen sich auf kleine Teilchen durch eine kontinuierliche Verteilung (etwa d^k-Verteilung) extrapolieren, wobei die beobachtete beinahe λ^{-1}-Verfärbung, die das Ähnlichbleiben der Spektralenergiekurve einer Planckschen Kurve hervorruft, eine entsprechende Erklärung findet.

Zu ganz anderen Ergebnissen sind E. Schoenberg und B. Jung[6] gelangt. Sie finden nämlich, dass ein kontinuierlicher Übergang von Sternschnuppen zu feineren

[6] Breslau Mitt. IV, 76 (1937).

Partikeln überhaupt nicht möglich ist. Zu einem solchen Schlusse sind sie durch die Wahl eines konkreten Verteilungsgesetzes gekommen. Von ihren zwei Hypothesen über die Durchmesserverteilung:

$$\sim \frac{1}{d^3} \text{ und } \sim \frac{1}{d^3}\frac{1}{1+h^2 d^2} \quad (h = 5 \text{ bei } d \text{ in } \mu)$$

haben sie die letztere gewählt, da diese den Betrag der Verfärbung besser angebe. Auf Grund dieser Hypothese finden sie aber die Gesamtdichte des nichtverfärbenden Anteils der absorbierenden Materie, wenn diese aus Eisen, Nickel und anderen Metallen besteht, als nur 6×10^{-27}, während nach C. Hoffmeister[7] schon die Gesamtdichte nur der teleskopischen Sternschnuppen rund 10^{-24} g/cm³ beträgt.

Dieser Unterschied zwischen unseren Ergebnissen und denen von Schoenberg und Jung ist erstens natürlich durch die verschiedenen Verteilungshypothesen bedingt. Nach der Hypothese von Schoenberg und Jung entsteht der nicht-nichtverfärbende Anteil der Absorption durch die Wirkung durchschnittlich feinerer, weniger massiver Partikeln, als bei der Hypothese der d^k-Verteilung ($k \approx -4$), was durch eine steilere Abnahme der Anzahl der grossen Partikeln (nach dem Gesetze $\sim d^{-5}$) bei der ersten Hypothese bedingt ist. Wie die entsprechenden Berechnungen zeigen, erfordert die erste Hypothese bei gleichem nichtverfärbendem Anteil der Absorption eine 10^3 bis 10^4 mal kleinere Anzahl von massiven Partikeln mit einem Durchmesser > 0.1 cm, als die zweite Hypothese. Auf die Dichte bezüglich kann ein noch etwas grösserer Unterschied entstehen (dieser hängt von der Wahl der oberen Durchmessergrenze ab[8]). Zweitens scheint auch, dass Hoffmeisters Wert der Gesamtdichte der teleskopischen Sternschnuppen stark überschätzt ist (bis 10^2 mal).

[7] Astr. Abh., Erg.-Hefte z. d. A. N. 4 Nr. 5 (1922).

[8] Z. B. bei der effektiven oberen Grenze 10^5 cm ist der Unterschied schon beträchlich grösser, als dem Verhältnis 10^4 entspricht. Die Gesamtdichte der interstellaren Materie hat bei der d^k-Verteilung (falls $k = -4$, 10^{-7} cm $\leqslant d \leqslant 10$ cm und $A = 10^{-24}$ pro cm³) den Wert $2{,}9 \times 10^{-26} \times \varrho$ g/cm³ (ϱ — durchschnittliche Partikeldichte), d. h. eine ca. 10 mal grössere Gesamtdichte als nach Schoenberg und Jung's Hypothese (7.6×10^{-27} g/cm³).

Welch eine Verteilung der Partikeldurchmesser der interstellaren Materie in der Tat statthat, ist schwer zu entscheiden. Die d^k-Verteilung mit $k \approx -4$ stellt jedenfalls die Durchmesserverteilung der Sternschnuppen gut dar und liefert das richtige Gesetz und einen plausiblen Betrag der Absorption. Diese Verteilung entspricht wenigstens schematisch den realen Verhältnissen, wobei die wirkliche Verteilung einen viel komplizierteren Charakter (mit Extremen) haben kann.

Tartu, Juni 1937.