PUBLICATIONS
DE
L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE TARTU
TOME XXVIII № 4

ANSÄTZE ZU EINER EXPANSIONISTISCHEN KINEMATIK

VON

J. NUUT

TARTU 1935

Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A XXIX. 6

K. Mattiesens Buchdr. Ant.-Ges., Tartu, 1935.

In einem vorhergehenden Artikel[1]) habe ich ein mathematisches Modell skizziert, das sowohl Expansion, als auch Gravitation im raumzeitlichen Weltgeschehen einheitlich erfasst. Beschränkt man sich auf einen zweidimensionalen Weltraum, so wird das Modell anschaulich; es besteht dann in folgendem:

In einem dreidimensionalen Lobatschewski'schen Raum $\mathbf{L}_3$, also einem Raum mit hyperbolischer Metrik, ist ein Bündel paralleler, d. h. sich in einem unendlich fernen (u. f.) Punkt treffender Geraden fixiert. Diese Parallelen markieren die Kraftlinien eines im $\mathbf{L}_3$ auf Massenpunkte wirkenden Schwerefeldes konstanter Intensität; die Kraft ist vom Scheitelpunkt des Bündels weg gerichtet. Das Schwerefeld bewirkt ein „Fallen" der Massen im $\mathbf{L}_3$. Die fallenden Massen führen einen der Schwere selbst nicht direkt unterworfenen zweidimensionalen Weltraum $\mathbf{E}'_2$ mit sich, wobei dieser $\mathbf{E}'_2$ der Verschiebung einen Widerstand entgegensetzt, so dass die stationäre Bewegung des $\mathbf{E}'_2$ gleichförmig wird. Der $\mathbf{E}'_2$ bildet im grossen eine Niveaufläche des Parallelenbündels, also eine Lobatschewski'sche Grenzsphäre; die Metrik im $\mathbf{E}'_2$ ist also im grossen euklidisch. Unter dem Druck der Massenpunkte wird aber die elastisch dehnbar gedachte Fläche $\mathbf{E}'_2$ lokal um ein geringes deformiert, nämlich in der nächsten Umgebung der Massen etwas eingebuchtet. Diese Einbuchtungen bewirken Gravitationserscheinungen der sich auf dem $\mathbf{E}'_2$ reibungslos verschiebenden Massen; diese Gravitation trägt jedoch durchaus lokalen Charakter. Im grossen werden dagegen die Massen unter dem Einfluss des divergierenden Parallelenbündels auseinanderstreben, im $\mathbf{E}'_2$ lokalisierte Beobachter werden also das Phänomen der Expansion konstatieren. Die Zeit ist ein der Weglänge in der Fallrichtung im $\mathbf{L}_3$ proportionaler Parameter. Die Nichtumkehrbarkeit der Zeit äussert sich in der Einseitigkeit des Parallelenbündels. Die den $\mathbf{L}_3$ definierende

---

[1]) „Eine nichteuklidische Deutung der relativistischen Welt." Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XXIX.$_3$ (1935).

charakteristische Konstante bestimmt eine für sämtliche Beobachter im E'_2 kovariante Geschwindigkeit, die man offenbar als Lichtgeschwindigkeit c zu deuten hat.

Die hier kurz angedeutete Auffassung verknüpft die Weltexpansion auf natürliche Weise mit der Relativitätstheorie zu einem organischen Ganzen, nur dass die Einstein'sche sog. „spezielle" Theorie einer gewissen Konstante den Wert 0 beimisst, während der tatsächliche Wert dieser Konstante (des Expansionskoeffizienten), wenn auch als sehr klein, so doch als von 0 verschieden anzunehmen ist. Für die dargestellte Auffassung charakteristisch ist, dass die Gravitation bloss ein nebensächliches, die Expansion störendes Phänomen bedeutet. In der vorliegenden Abhandlung sind einige Konsequenzen dieser Ideen analytisch entwickelt, u. zw. für den tatsächlichen, anschaulich nicht erfassbaren Fall eines dreidimensionalen Weltraumes, jedoch ohne Berücksichtigung der lokalen Raumkrümmungen, d. h. der Gravitation.

Um dem auf die Physik orientierten Leser das Verständnis der zum eigentlichen Thema gehörigen Ausführungen zu erleichtern und das notwendige analytische Werkzeug beisammen zu haben, sind vor allem (§§ 1—4) die in Frage kommenden bekannten Tatsachen und Formeln der hyperbolischen Geometrie für eine beliebige Dimensionszahl n in knapper Form zusammengestellt. In den nachfolgenden Paragraphen (§§ 5—11) handelt es sich dann schon um Probleme in physikalischer Einkleidung. Der Leser kann mit § 5 beginnen und §§ 1—4 als rein-mathematischen Anhang betrachten. Eigentlich den Astrophysiker angehende Fragen sind im § 8 behandelt.

---

§ 1. **Gruppe der hyperbolischen Bewegungen.** Im folgenden bedeutet n irgendeine fixierte positive ganze Zahl. Zur Abkürzung der Schreibweise sollen für Indizes folgende Festsetzungen gelten:

Ein mit α, β oder γ bezeichneter Index soll die Werte 1 bis n annehmen; es bedeutet demnach z. B. x_β entweder x_1, oder $x_2, \ldots$ oder x_n. Ein mit λ, μ oder ν bezeichneter Index soll dieselben Werte, jedoch mit Ausnahme einiger gewisser spezieller Werte, durchlaufen. Vom § 3 an ist beständig n der einzige ausgenommene Spezialwert. Ein lateinischer Index

k, l oder m bedeutet stets eine bestimmte Zahl aus der Wertreihe 0, 1, . . ., n, eventuell unter gewissen, besonders genannten Nebenbedingungen. Tritt in zwei oder mehr nebeneinandergesetzten Termen ein und derselbe griechische Index auf, so soll es sich nicht einfach um das Produkt dieser Terme, sondern um die Summe der Produkte für sämtliche gestatteten Werte dieses gemeinsamen Index handeln. Es bedeutet also z. B. $x_\beta\, y_\beta$ die Summe $x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$, dagegen $x_\nu\, y_\nu$ vom § 3 an stets die Summe $x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_{n-1}\, y_{n-1}$.

Ein n-dimensionaler hyperbolischer Raum $\mathbf{L}_n$ wird nun für unsere Zwecke am passendsten folgendermassen definiert [2]):

Ein Punkt (x_0, x_β) oder kurz (x) ist ein geordneter Wertekomplex der $n+1$ für allgemein reell genommenen Variablen x_0, x_β. Zulässig ist jeder Wertekomplex, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, wo sämtliche Variablen gleichzeitig 0 sind. Die Punkte (x) und $(\varkappa\, x)$, d. h. (x_0, x_β) und $(\varkappa\, x_0, \varkappa x_\beta)$ sind bei jedem von 0 verschiedenen $\varkappa$ als identisch anzusehen. Die x_0, x_β sind die homogenen Koordinaten dieses Punktes. Wählt man $x_0 = 1$, so erhält man die unhomogenen Koordinaten des betreffenden Punktes, wobei dann die Angabe der x_β allein schon den Punkt eindeutig bestimmt.

Wir wählen nun eine positive Konstante c und fixieren die quadratische Form F_{xx}:

$$F_{xx} = c^2\, x_0^2 - x_\beta\, x_\beta. \tag{1}$$

Die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten der Gleichung

$$F_{xx} = 0 \tag{2}$$

genügen, liefert das absolute Gebilde oder auch das u. f. Gebilde des $\mathbf{L}_n$; ein jeder Punkt von (2) heisst ein u. f. Punkt.

Wird für einen Punkt

$$F_{xx} > 0, \tag{3}$$

[2]) Als zusammenhängende Darstellung der Grundzüge der nichteuklidischen Geometrie sei etwa genannt J. L. Coolidge, „The Elements of Non-Euclidean Geometry“ (Oxford 1909). Die Bezeichnung „hyperbolischer Raum“ rührt von F. Klein her [(„Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“; Math. Ann. Bd. 4 (1871) u. Bd. 6 (1873)], desgleichen der ganze Gedankengang von §§ 1 und 2 unseres Textes.

so heisst der Punkt ein eigentlicher. Punkte, für die F_{xx} negativ wird, heissen ideell. Die Gesamtheit der eigentlichen Punkte bildet den eigentlichen Raum $\mathbf{L}_n$, der uns hier vorzugsweise interessiert. Für einen eigentlichen Punkt kann man stets $x_0 = 1$ wählen, also unhomogene Koordinaten verwenden, was wir von § 4 an durchweg tun wollen.

Unter den linearen homogenen Punkttransformationen

$$x_0 = a_{00} x'_0 + a_{0\beta} x'_\beta, \quad x_\alpha = a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta \tag{4}$$

mit reellen Koeffizienten a_{kl}, positivem a_{00} und positiver Determinante D gibt es solche, für die die Form F_{xx} eine Kovariante ist. Diesen sämtlichen Forderungen genügende Transformationen sollen Bewegungen des $\mathbf{L}_n$ heissen, die den Punkt (x) in den Punkt (x') überführen. Eine proportionale Änderung sämtlicher Koeffizienten ist hierbei ohne Belang; andererseits kann man durch proportionale Änderung der Koeffizienten erreichen, dass $D = 1$ wird. Man erhält dann für jede Bewegung einen eindeutig definierten Repräsentanten (4). Die Gesamtheit dieser Repräsentanten liefert eine Transformationsgruppe. Für einen solchen Repräsentanten ergibt die Kovarianzforderung:

$$c^2 (a_{00} x'_0 + a_{0\beta} x'_\beta)^2 - (a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta)(a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta) \equiv$$
$$\equiv c^2 x'^2_0 - x'_\beta x'_\beta ,$$

was durch Koeffizientenvergleichung zum Bedingungssystem

$$\begin{aligned} c^2 a^2_{00} - a_{\alpha 0} a_{\alpha 0} &= c^2 \\ c^2 a^2_{0k} - a_{\alpha k} a_{\alpha k} &= -1, \quad k \neq 0 \\ c^2 a_{0k} a_{0l} - a_{\alpha k} a_{\alpha l} &= 0, \quad k \neq l \end{aligned} \tag{5}$$

führt.

Bedeutet A_{kl} die a_{kl} entsprechende Unterdeterminante von D, so wird infolge $D = 1$ die zu (4) inverse Transformation lauten

$$x'_0 = A_{00} x_0 + A_{\beta 0} x_\beta , \quad x'_\alpha = A_{0\alpha} x_0 + A_{\beta\alpha} x_\beta .$$

Wegen

$$a_{00} A_{00} + a_{\beta 0} A_{\beta 0} = D, \quad a_{0\alpha} A_{00} + a_{\beta\alpha} A_{\beta 0} = 0$$

und (5) wird aber

$$A_{00} = a_{00}, \quad A_{\beta 0} = -\frac{a_{\beta 0}}{c^2},$$

und auf ähnliche Weise folgt

$$A_{0\alpha} = -c^2 a_{0\alpha}\,, \quad A_{\beta\alpha} = a_{\beta\alpha}\,.$$

Führt man dies ein, so ergibt sich als zu (4) inverse Transformation

$$x'_0 = a_{00}\,x_0 - \frac{1}{c^2}\,a_{\beta 0}\,x_\beta, \quad x'_\alpha = -c^2 a_{0\alpha}\,x_0 + a_{\beta\alpha}\,x_\beta\,. \tag{6}$$

Wendet man hierauf (5) an, so folgt, dass die a_{kl} auch noch den Bedingungen

$$\begin{aligned} a^2_{00} - c^2 a_{0\alpha}\,a_{0\alpha} &= 1 \\ a^2_{k0} - c^2 a_{k\alpha}\,a_{k\alpha} &= -c^2, \quad k \neq 0 \\ a_{k0}\,a_{l0} - c^2 a_{k\alpha}\,a_{l\alpha} &= 0, \quad k \neq l \end{aligned} \tag{7}$$

Folge leisten.

Dass solche Bewegungstransformationen tatsächlich existieren, zeigen folgende Beispiele:

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \\ x_k &= x'_k \cos\varphi + x'_l \sin\varphi \\ x_l &= -x'_k \sin\varphi + x'_l \cos\varphi \\ x_\nu &= x'_\nu\,, \qquad \nu \neq k,\ \nu \neq l\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese durch das Indexpaar k, l und den reellen Parameter φ gekennzeichnete Bewegung heisst eine Drehung.

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \operatorname{ch}\omega - x'_k \frac{1}{c} \operatorname{sh}\omega \\ x_k &= -x'_0\, c \operatorname{sh}\omega + x'_k \operatorname{ch}\omega \\ x_\nu &= x'_\nu\,, \qquad k \neq 0,\ \nu \neq k\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Hier bedeuten $\operatorname{sh}\omega$ und $\operatorname{ch}\omega$ entsprechend den Hyperbelsinus und den Hyperbelcosinus eines reellen Parameters ω. Diese durch ω und den Index k gekennzeichnete Bewegung heisst eine Verschiebung; wir bezeichnen sie weiterhin mit $V_k(\omega)$.

3. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \operatorname{ch}\omega - x_\beta\, a_\beta \frac{1}{c} \operatorname{sh}\omega \\ x_\gamma &= -x'_0\, c\, a_\gamma \operatorname{sh}\omega + x'_\gamma + x_\beta\, a_\beta\, a_\gamma (\operatorname{ch}\omega - 1), \end{aligned} \tag{10}$$

wobei die a_β reelle Parameter bedeuten, die der Bedingung

$$a_\beta\, a_\beta = 1 \tag{11}$$

genügen. Für $a_k = 1$, $a_\nu = 0$, $\nu \neq k$, geht diese Bewegung in $V_k\,(\omega)$ über.

Man kann beweisen, dass sämtliche Bewegungen des $\mathbf{L}_n$ sich aus Verschiebungen und Drehungen zusammensetzen lassen, doch brauchen wir darauf nicht näher einzugehen.

Aus der Kovarianz von F_{xx} folgt, dass die Kategorie, der ein Punkt angehört, sich bei den Transformationen der Gruppe der hyperbolischen Bewegungen nicht ändert. Es ist also speziell unmöglich durch Bewegungen aus dem eigentlichen Gebiet des $\mathbf{L}_n$ hinauszugelangen.

§ 2. **Distanz, Bogenelement, Winkelgrösse, Orthogonalität.** Sind (x) und (y) zwei verschiedene Punkte, so heisst die Gesamtheit der Punkte $(ux + vy)$, also der Punkte mit den Koordinaten $ux_0 + vy_0$, $ux_\beta + vy_\beta$ bei variablen u, v, die Gerade $ux + vy$.

Den durch $x_\beta = 0$ definierten Punkt nennen wir den Ursprung. Die durch den Ursprung und den Punkt

$$x_k = c\, x_0\,,\ x_\nu = 0\,,\ \nu \neq k$$

bestimmte Gerade soll die k-Achse heissen.

Bei einer Bewegung (4) geht die Gerade $ux + vy$ in die Gerade $ux' + vy'$ über. Bewegungen sind demnach nicht bloss Punkt-, sondern auch Geradentransformationen (Kollineationen).

Es gilt wie für jede quadratische Form die Identität

$$F_{ux+vy,\,ux+vy} = u^2\, F_{xx} + 2\, uv\, F_{xy} + v^2 F_{yy}\,, \tag{12}$$

wo

$$F_{xy} = F_{yx} = c^2\, x_0\, y_0 - x_\beta\, y_\beta\,. \tag{13}$$

Wendet man auf beide Seiten von (12) eine Bewegungstransformation an, so zeigt sich, dass die bilineare Polarform F_{xy} gleichfalls eine Kovariante der Bewegungsgruppe ist.

Der Quotient $\frac{u_1}{v_1} : \frac{u_2}{v_2}$ heisst das Doppelverhältnis der zwei Punktepaare (x), (y) und $(u_1\, x + v_1\, y)$, $(u_2\, x + v_2\, y)$ einer Geraden. Dieses Doppelverhältnis ist beliebigen linearen homogenen Transformationen gegenüber invariant.

Unter der Distanz oder Entfernung ϱ_{xy} zweier Punkte wird der mit $\frac{c}{2}$ multiplizierte Wert des natürlichen Logarithmus von demjenigen Doppelverhältnis verstanden, den die beiden Punkte (x), (y) einerseits und die Schnittpunkte der Geraden $ux + vy$ mit dem absoluten Gebilde andererseits ergeben. Dieses Doppelverhältnis bestimmt sich aus der in Bezug auf $\frac{u}{v}$ quadratischen Gleichung, die erhalten wird durch Nullsetzung der rechten Seite von (12). Statt der zitierten expliziten Definition von ϱ_{xy} ist es analytisch bequemer mit Hyperbelfunktionen von $\frac{\varrho_{xy}}{c}$ zu operieren. Ausgehend von der expliziten Definition findet man durch einige Umformungen:

$$\operatorname{ch} \frac{\varrho_{xy}}{c} = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_{xx} F_{yy}}}, \quad \operatorname{th} \frac{\varrho_{xy}}{c} = \frac{\sqrt{F^2_{xy} - F_{xx} F_{yy}}}{F_{xy}}. \tag{14}$$

Sind beide Punkte (x) und (y) eigentlich, so ist durch jede der Formeln (14) ϱ_{xy} reell und dem Absolutwert nach eindeutig bestimmt.

Schreibt man $(x + dx)$ statt (y), wobei im eigentlichen Gebiet stets $dx_0 = 0$ gesetzt werden darf, so ergibt jede der Formeln (14) für die dann zur symbolischen Andeutung des Grenzprozesses mittels $d\varrho$ zu bezeichnende Distanz:

$$d\varrho^2 = c^2 \frac{F^2_{x,\,dx} - F_{xx} F_{dx,\,dx}}{F^2_{xx}}. \tag{15}$$

Dies ist der Ausdruck für das Quadrat eines Bogenelements $d\varrho$ in dieser hyperbolischen Metrik.

Aus (14) ersieht man, dass ϱ_{xy} unendlich gross wird, wenn (y) ein u. f. Punkt, (x) dagegen ein beliebiger eigentlicher oder ideeller Punkt ist. Damit ist die Bezeichnung u. f. Punkt gerechtfertigt.

Analog der Distanz wird die Winkelgrösse definiert. Sind (x), (η), (ζ) drei verschiedene, nicht einer Geraden angehörige Punkte, so bildet die Gesamtheit der Punkte $(ux + v\eta + w\zeta)$ eine (zweidimensionale) Ebene. Jede Gerade durch (x) in dieser Ebene $ux + v\eta + w\zeta$ trifft die Gerade $v\eta + w\zeta$ in einem bestimmten Punkte, vier solcher Geraden also in vier Punkten;

diese vier Punkte bestimmen das Doppelverhältnis der betreffenden vier Geraden. Bedeutet i die imaginäre Einheit, so versteht man unter der Grösse des Winkels zwischen den Geraden $ux + v\eta$, $ux + w\zeta$ den mit $\frac{i}{2}$ multiplizierten Wert des natürlichen Logarithmus von dem Doppelverhältnis, das beide genannten Geraden und das durch (x) gehende und in derselben Ebene liegende Tangentenpaar an das absolute Gebilde ergeben. Hier benutzt man statt der expliziten Definition dieses Winkels $\varphi_{\eta\zeta}$ besser die trigonometrischen Funktionen von $\varphi_{\eta\zeta}$. Eine Berechnung auf Grund der zitierten Definition ergibt:

$$\cos \varphi_{\eta\zeta} = \frac{F_{xx} F_{\eta\zeta} - F_{x\eta} F_{x\zeta}}{\sqrt{(F_{x\eta}^2 - F_{xx} F_{\eta\eta})(F_{x\zeta}^2 - F_{xx} F_{\zeta\zeta})}} \cdot \tag{16}$$

Ist der Scheitelpunkt (x) eigentlich, so ist $\varphi_{\eta\zeta}$ durch (16) reell u. zw. unendlich vieldeutig bestimmt. Eine Verschiebung von (η) resp. (ζ) längs $ux + v\eta$ resp. $ux + w\zeta$ lässt $\varphi_{\eta\zeta}$ ungeändert. Bewegungen gegenüber erweisen sich Distanz und Winkel als invariant, wie aus den Darstellungen (14) und (16) abzulesen ist.

Es wird $\varphi_{\eta\zeta} = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Geraden werden wechselseitig orthogonal, sobald

$$F_{xx} F_{\eta\zeta} - F_{x\eta} F_{x\zeta} = 0 \,. \tag{17}$$

Man verifiziert hiernach leicht, dass je zwei Achsen zueinander senkrecht stehen.

Ist (x) der Ursprung, (ζ) beliebig, so bildet die Gerade $ux + w\zeta$ mit der β-Achse einen Winkel φ_β, der sich aus

$$\cos \varphi_\beta = \frac{\zeta_\beta}{\sqrt{\zeta_\beta \zeta_\beta}} \tag{18}$$

bestimmt, wie aus (16) zu ersehen ist. Gibt man der Quadratwurzel in (18) ein festes Vorzeichen, so heissen die n Grössen $\cos \varphi_\beta$ die Richtungskosinus der Geraden $ux + w\zeta$. Sind α_γ und β_γ entsprechend die Richtungskosinus zweier durch den Ursprung gehender Geraden, so findet man wiederum nach (16) für den Winkel φ zwischen diesen beiden Geraden

$$\cos \varphi = \alpha_\gamma \beta_\gamma \,. \tag{19}$$

Fallen beide Geraden zusammen, so wird $\varphi = 0$ und (19) ergibt

$$\alpha_\gamma \alpha_\gamma = 1 \,. \tag{20}$$

Die Formeln (19) und (20) stimmen mit denjenigen der euklidischen Geometrie überein.

Analysiert man die in § 1 Beispiel 3 behandelte Bewegung (10), so findet man jetzt, dass die dort auftretenden Grössen a_β die Richtungskosinus derjenigen Geraden sind, welche durch den Ursprung und durch denjenigen Punkt geht, in welchen der Ursprung durch diese Bewegung übergeführt wird. Diese Gerade schneidet das absolute Gebilde in einem Punkt (η), wobei $\eta_\beta = c\,\eta_0\,a_\beta$, und dieser Punkt erweist sich als ein Fixpunkt der Bewegung. Die Gerade mit den Richtungskosinus a_β wird daher durch die genannte Bewegung in sich selbst transformiert, sie ist die Verschiebungsachse. Man verifiziert ferner leicht, etwa durch Determinantenbildung, dass ein beliebiger Punkt des $\mathbf{L}_n$ sich nach Ausführung der Bewegung (10) in derselben durch die Verschiebungsachse gehenden Ebene befindet, in der er sich zuvor befand. Die Bewegung (10) ist daher eine Verschiebung ohne Drehung. Jeder eigentliche Punkt der Verschiebungsachse wird um die Strecke $q = c\,\omega$ verschoben. Für Punkte, die nicht auf der Verschiebungsachse liegen, ist der Betrag der Verschiebung grösser, u. zw. um so mehr, je weiter sie von dieser Achse abstehen. Hierin besteht ein charakteristischer Unterschied zwischen hyperbolischen und euklidischen Verschiebungen.

Es sei noch auf folgende, auf Grund von (14) und (16) verifizierbare Tatsachen hingewiesen:

Ist ϱ_β die auf geläufige Weise mit einem Vorzeichen versehene Distanz der Orthogonalprojektion eines beliebigen Punktes (ζ) auf die β-Achse, so hat die unhomogene Koordinate ζ dieses Punktes die Bedeutung:

$$\zeta_\beta = c \operatorname{th} \frac{\varrho_\beta}{c} \,. \tag{21}$$

Für ein unendlich grosses c gelangt man so zu cartesischen Koordinaten.

Die Gesamtheit derjenigen Punkte, wo $x_n = 0$ wird, bildet einen $\mathbf{L}_{n-1}$ mit derselben charakteristischen Konstanten c. Ist nun (η) irgendein Punkt des $\mathbf{L}_n$, ferner $(\tilde{\eta})$ derjenige Punkt des $\mathbf{L}_{n-1}$, für welchen

$$\tilde{\eta}_0 = \eta_0\,, \quad \tilde{\eta}_\nu = \eta_\nu\,, \quad \tilde{\eta}_n = 0 \quad (\nu \neq n)\,,$$

so erweist sich $(\tilde{\eta})$ als Orthogonalprojektion des Punktes (η) auf den $\mathbf{L}_{n-1}$. Dies will besagen, dass die Gerade $u\eta + v\tilde{\eta}$ orthogonal ist zu jeder durch $(\tilde{\eta})$ gehenden, im $\mathbf{L}_{n-1}$ gelegenen Geraden. Nimmt man speziell (η) auf der n-Achse, so ist $(\tilde{\eta})$ der Ursprung, und es erweist sich die n-Achse als orthogonal zu jeder durch den Ursprung im $\mathbf{L}_{n-1}$ verlaufenden Geraden. Die durch (η) und die n-Achse gehende Ebene enthält stets auch den Punkt $(\tilde{\eta})$; beschreibt hierbei (η) eine Gerade in dieser Ebene, so ist die Schnittgerade dieser Ebene mit dem $\mathbf{L}_{n-1}$ die Orthogonalprojektion der erstgenannten Geraden auf den $\mathbf{L}_{n-1}$.

Für die Distanz ϱ eines beliebigen Punktes (η) vom Ursprung findet man nach (14) in unhomogenen Koordinaten η_β:

$$c \operatorname{th} \frac{\varrho}{c} = \sqrt{\eta_\beta \eta_\beta} \,. \tag{22}$$

Die Projektion $\bar{\varrho}$ dieser Distanz auf den $\mathbf{L}_{n-1}$ führt vom Ursprung zu $(\tilde{\eta})$. Bedeutet φ den Winkel zwischen ϱ und $\bar{\varrho}$, so berechnet sich aus (18), (19) und (22)

$$\operatorname{th} \frac{\bar{\varrho}}{c} = \operatorname{th} \frac{\varrho}{c} \cdot \cos \varphi, \tag{23}$$

und diese Formel gilt dann notwendigerweise für jede Strecke ϱ und ihre in einen Endpunkt von ϱ mündende Projektion $\bar{\varrho}$, unabhängig davon, ob $\bar{\varrho}$ im $\mathbf{L}_{n-1}$ liegt oder nicht. Im rechtwinkligen geradlinigen Dreieck, wo ϱ die Hypotenuse und $\bar{\varrho}$ die anliegende Kathete bedeutet, wird also der spitze Winkel φ durch (23) bestimmt.

Liegen zwei Punkte A, B entsprechend auf zwei verschiedenen Achsen in den Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 vom Ursprung, so findet man für die Distanz ϱ von A bis B aus (14):

$$\operatorname{ch} \frac{\varrho}{c} = \operatorname{ch} \frac{\varrho_1}{c} \cdot \operatorname{ch} \frac{\varrho_2}{c}, \tag{24}$$

und diese Formel gilt offenbar wieder für jedes rechtwinklige Dreieck, unabhängig von der speziellen Lage der Katheten. Durch (23) und (24) ist die Trigonometrie des rechtwinkligen, mithin auch eines beliebigen schiefwinkligen Dreiecks vollkommen bestimmt. Da (23) und (24) sich aus bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, wenn man den Radius der betreffenden Sphäre rein imaginär u. zw. gleich ci nimmt, so folgt, dass die ebene Trigonometrie des $\mathbf{L}_n$ formal identisch ist mit

der Trigonometrie auf einer euklidischen Sphäre mit imaginärem Radius ci.

Beiläufig sei erwähnt, dass infolge (16) und (14) die Trigonometrie sphärischer Dreiecke im $\mathbf{L}_n$ identisch wird mit der euklidischen sphärischen Trigonometrie, soweit nicht Berechnungen in Längeneinheiten in Betracht kommen.

§ 3. **Isogonalräume von Parallelenbündeln (uneigentliche Sphären)** [3]. In unserer weiteren Darstellung werden Gebilde auftreten, deren Gleichung lautet:

$$F_{xx} - (c x_0 - x_n + k_\nu \, x_\nu \cot \psi)^2 = 0 . \tag{25}$$

Hierin ist ψ eine Konstante, während die Grössen k_ν Richtungskosinus einer durch den Ursprung gehenden und im $\mathbf{L}_{n-1}$ verlaufenden Geraden sind; es ist also

$$k_\nu \, k_\nu = 1, \tag{26}$$

wobei der Index ν, wie weiterhin überall, von 1 bis $n-1$ läuft. Mit den geometrischen Eigenschaften dieser $(n-1)$-dimensionalen Gebilde (25) müssen wir uns näher vertraut machen.

Sieht man von imaginären Punkten ab, so besitzt (25) offenbar nur eigentliche und unendlich ferne Punkte. Seine eigentlichen Punkte verteilen sich auf zwei Gebiete, die durch unendlich ferne Punkte getrennt werden. Die u. f. Punkte des Gebildes ergeben sich als Schnitt von

$$c \, x_0 - x_n + k_\nu \, x_\nu \cot \psi = 0 \tag{27}$$

mit $F_{xx} = 0$. Zur Abkürzung soll in diesem Paragraphen die Gesamtheit der u. f. Punkte von (25) das Gebiet U heissen.

Die n-Achse trifft (25) im Ursprung und im Punkt $\zeta_\nu = 0$, $\zeta_n = c \, \zeta_0$; dieser Punkt (ζ) gehört U an. Wir wollen zunächst feststellen, wie sich die Gleichung (25) transformiert, wenn man eine Bewegung ausführt, die den Ursprung ungeändert lässt, dabei aber die n-Achse durch einen anderen Punkt von U hindurchführt. Die Koeffizienten einer solchen Bewegungstransformation (4) müssen offenbar ausser (5) und (7) noch gewissen anderen einschränkenden Bedingungen unterliegen. Der Um-

[3]) Über Eigenschaften und Definitionsmöglichkeiten von Sphären in der nichteuklidischen Geometrie vgl. z. B. J. L. Coolidge, l. c., XI, oder auch F. Klein „Vorles. ü. Nicht-Euklidische Geometrie" (Neubearbeitung von W. Rosemann, Berlin 1928), Kap. VIII § 7.

stand, dass der Ursprung ein Fixpunkt sein soll, ergibt nach (4), (6) und (7)

$$a_{\beta 0} = 0\,, \quad a_{0\beta} = 0\,, \quad a_{00} = 1\,. \tag{28}$$

Die zweite Forderung lässt sich so auffassen, dass ein Punkt von (27) in (ζ) übergehen soll; dies führt über (4), (28) und (27) zur Relation

$$1 - a_{nn} + k_\nu\, a_{\nu n} \cot \psi = 0\,. \tag{29}$$

(28) und (29) sind die gesuchten einschränkenden Bedingungen. Man findet mit ihrer Hilfe

$$c x_0 - x_n + k_\nu\, x_\nu \cot \psi = c x'_0 - x'_n + (k_\nu\, a_{\nu\mu} - a_{n\mu} \tan \psi)\, x'_\mu \cot \psi\,.$$

Nun zeigt es sich aber, dass man die Grössen

$$k_\nu\, a_{\nu\mu} - a_{n\mu} \tan \psi = k'_\mu$$

wieder als Richtungskosinus einer gewissen im $\mathbf{L}_{n-1}$ liegenden, durch den Ursprung gehenden Geraden auffassen kann. Man findet nämlich unter Bezugnahme auf (5), (7), (28), (29), (26):

$$\begin{aligned} k'_\mu\, k'_\mu &= k_\lambda\, k_\nu\, a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\mu} - 2\, k_\nu\, a_{\nu\mu}\, a_{n\mu} \tan \psi + a_{n\mu}\, a_{n\mu} \tan^2 \psi \\ &= k_\lambda\, k_\nu\, a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\mu} + 2\, k_\nu\, a_{\nu n}\, a_{nn} \tan \psi + (1 - a^2_{nn}) \tan^2 \psi \\ &= k_\lambda\, k_\nu\, a_{\lambda\mu}\, a_{\nu\mu} + k_\lambda\, k_\nu\, a_{\lambda n}\, a_{\nu n} \\ &= k_\nu\, k_\nu \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Da F_{xx} Bewegungen gegenüber kovariant ist, so nimmt also die transformierte Gleichung (25) die Gestalt an

$$F_{x'x'} - (c\, x'_0 - x'_n + k'_\nu\, x'_\nu \cot \psi)^2 = 0\,.$$

Hier hat ψ denselben Wert beibehalten und nur die Gerade k_ν ist in eine andere Gerade k'_ν übergegangen, die nach Ausführung der Bewegung in den $\mathbf{L}_{n-1}$ zu liegen kommt.

Nun soll noch der Einfluss einer anderen Bewegung untersucht werden, nämlich einer solchen, wo (ζ) ein Fixpunkt bleibt, dagegen irgendein anderer eigentlicher Punkt von (25) in den Ursprung fällt. Der analytische Ausdruck der ersten Forderung wird hier

$$c\, a_{0\nu} - a_{n\nu} = 0\,, \quad a_{\nu 0} + a_{\nu n}\, c = 0\,, \quad c a_{00} - a_{n0} = -c^2 a_{0n} + a_{nn}\, c\,. \tag{30}$$

Hiernach findet man:

$$c x_0 - x_n + k_\nu\, x_\nu \cot \psi = (a_{nn} - c a_{0n} - k_\nu\, a_{\nu n} \cot \psi)\,(c x'_0 - x'_n) + \\ + k_\nu\, a_{\nu\mu}\, x'_\mu \cot \psi\,.$$

Ferner ergibt die zweite Forderung

$$(c^2 a_{00}^2 - a_{n0}^2 - a_{\nu 0}\, a_{\nu 0}) - (c a_{00} - a_{n0} + k_\nu\, a_{\nu 0} \cot \psi)^2 = 0\,,$$

was unter Bezugnahme auf (5) und (30) zu

$$a_{nn} - c a_{0n} - k_\nu\, a_{\nu n} \cot \psi = \pm 1$$

führt. Die Grössen

$$\pm k_\nu\, a_{\nu\mu} = k'_\mu$$

erweisen sich wiederum als Richtungskosinus einer Geraden im $\mathbf{L}_{n-1}$, denn es wird

$$\begin{aligned} k'_\mu\, k'_\mu &= k_\nu\, a_{\nu\mu}\, k_\lambda\, a_{\lambda\mu} \\ &= k_\nu\, k_\lambda\, a_{\nu\mu}\, a_{\lambda\mu} \\ &= k_\nu\, k_\nu \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Fasst man alles dies zusammen, so gelangt man wieder zu der schon früher erhaltenen Gestalt der transformierten Gleichung (25).

Durch Verknüpfung beider Bewegungsarten folgt somit der Satz:

> Eine beliebige Bewegung, die nur den Schnittpunkt der n-Achse im Unendlichfernen in einen anderen Punkt von U verlegt und den Ursprung in irgendeinen anderen eigentlichen Punkt von (25) überführt, ändert weder die Gestalt der Gleichung (25), noch den Parameter ψ, sondern ersetzt bloss die Richtungskosinus k_ν durch andere.

Bedeutet (x) einen Punkt von (25), (η) einen variablen Punkt im $\mathbf{L}_n$, und setzt man die für (η) gebildete Polarform der linken Seite von (25) gleich Null, so folgt

$$F_{x\eta} - (c x_0 - x_n + k_\nu\, x_\nu \cot \psi)\,(c \eta_0 - \eta_n + k_\nu\, \eta_\nu \cot \psi) = 0. \quad (31)$$

Es ist dies die Gleichung des $(n-1)$-dimensionalen ebenen Berührungsraumes des Gebildes (25), wenn (x) den Berührungspunkt und (η) einen beliebigen Punkt dieses Berührungsraumes darstellt. Jede Gerade $u x + v \eta$, wo (x) der Gleichung (25) und (η) der Gleichung (31) Folge leistet, ist eine Tangente an (25). Fällt (x) in den Ursprung, so ergibt (31):

$$k_\nu\, \eta_\nu \cot \psi - \eta_n = 0\,. \quad (32)$$

Für den Winkel φ, den eine durch den Ursprung als Berührungspunkt an (25) gelegte Tangente mit der n-Achse bildet, findet man aus (16) und (32)

$$\cot \varphi = \frac{k_\nu \eta_\nu}{\sqrt{\eta_\nu \eta_\nu}} \cot \psi .$$

Nun besitzt aber die Projektion dieser Tangente auf den $\mathbf{L}_{n-1}$ folgende Richtungskosinus a_μ in diesem $\mathbf{L}_{n-1}$:

$$a_\mu = \frac{\eta_\mu}{\sqrt{\eta_\nu \eta_\nu}} .$$

Es wird daher

$$\cot \varphi = k_\nu a_\nu \cot \psi = \cos \delta \cdot \cot \psi , \tag{33}$$

wenn δ den Winkel zwischen der Projektion der Tangente und der durch die k_ν bestimmten Geraden bedeutet. Der Winkel φ schwankt also, je nach der Lage der Tangente, zwischen den Extremalwerten ψ und $\pi - \psi$, m. a. W., ψ ist der Neigungswinkel der n-Achse gegen den Berührungsraum (32). Aus dem oben bewiesenen Satz folgt aber dann:

> Jede durch U gehende Gerade, welche das Gebilde (25) in einem eigentlichen Punkt trifft, ist gegen den Berührungsraum in diesem Treffpunkt um den Winkel ψ geneigt.

Nennt man die Gesamtheit der Geraden mit einem gemeinsamen u. f. Punkt ein Parallelenbündel im $\mathbf{L}_n$, so hat man demnach in (25) ein Gebilde, das sämtliche Geraden eines Parallelenbündels, die es in eigentlichen Punkten trifft, isogonal, und zwar stets unter demselben Winkel ψ schneidet, sobald nur der Scheitel des Bündels auf U liegt. Infolge dieser Eigenschaft nennen wir das Gebilde (25) einen Isogonalraum.

Denjenigen u. f. Punkt, wo die n-Achse das Gebilde (25) trifft, d. h. den Punkt, dessen Koordinaten

$$x_\nu = 0 , \quad x_n = c x_0$$

sind, wollen wir von nun an überall stets mit M bezeichnen.

Eine Ebene durch M wird den Isogonalraum in einer ebenen Kurve schneiden. Lässt man diese Ebene in die n & 1-Ebene (also die Ebene, welche die n-Achse und die 1-Achse enthält) fallen, was stets durch eine Bewegungstransformation, die M

ungeändert lässt, erreicht werden kann, so wird die Gleichung dieser Kurve:

$$F_{xx} - (cx_0 - x_n + x_1 \cot \psi_1)^2 = 0, \tag{34}$$
$$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0,$$

wobei

$$\cot \psi_1 = k_1 \cot \psi$$

gesetzt ist. Es ist dies nichts anderes, als ein Spezialfall von (25) für die Dimensionszahl $n = 2$; der einzige Richtungskosinus k_1 wird dann notwendigerweise gleich 1, wenn man ihn positiv wählt. Für die Kurve (34) gilt also ebenfalls die Isogonaleigenschaft, u. zw. mit $\cos \delta = 1$, weil die Projektion der Tangente notwendig in die einzige Gerade des $\mathbf{L}_{n-1}$, nämlich die 1-Achse fällt, und diese einzige Gerade ebenso notwendig die k_ν-Gerade sein muss. Es wird also für die Kurve (34) $\varphi = \psi_1$ oder $\varphi = \pi - \psi_1$, bei passender Richtungswahl wird also der Neigungswinkel gleich ψ_1. Einen durch M gehenden ebenen Schnitt von (25) nennen wir kurz eine Isogone. Eine solche Isogone schneidet die sie in eigentlichen Punkten treffenden Geraden des durch M definierten Parallelenbündels unter einem konstanten Winkel ψ_1; die Grösse ψ_1 hängt von der speziellen Lage der Schnittebene ab, jedoch ist beständig ψ_1 in den Schranken ψ und $\pi - \psi$ eingeschlossen. Im Extremalfall $\psi_1 = \psi$ oder $\psi_1 = \pi - \psi$ sprechen wir von einer Hauptisogone.

Der Pol (p) von (27) in bezug auf das absolute Gebilde hat die Koordinaten

$$p_\nu = - c\, k_\nu\, p_0 \cot \psi, \quad p_n = c\, p_0. \tag{35}$$

Sucht man den Schnitt der durch die n-Achse und durch (p) gehenden Ebene mit dem $\mathbf{L}_{n-1}$, so ergibt sich für die Koordinaten x_ν eines beliebigen Punktes der Schnittgeraden:

$$x_\nu = a\, k_\nu,$$

wo a bei gewähltem Punkt eine Konstante ist. Hieraus folgt, dass die k_ν die Richtungskosinus dieser Schnittgeraden sind. Die Projektion der Tangente des Isogonalraumes fällt also bei dieser Schnittebene mit der Geraden k_ν zusammen, d. h. δ in (33) wird 0 und die Schnittkurve mit (25) wird eine Hauptisogone. Es gilt also der Satz:

> Man erhält als Schnittkurven dann und nur dann Hauptisogonen, wenn die Schnittebenen durch den Pol (35) gehen.

Es ist leicht zu verifizieren, dass jede den Isogonalraum in einem eigentlichen Punkt treffende Gerade durch den Pol (35) eine Normale von (25) darstellt. Sämtliche solche Normalen gehören also zu einem ideellen Bündel, mit dem im ideellen Gebiet gelegenen Scheitel (p). Von diesem Standpunkte aus gesehen ist der Isogonalraum (25) ein der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre verwandtes Gebilde; (p) ist der ins ideelle Gebiet verrückte Mittelpunkt dieser Sphäre; der komplexe Radius ϱ bestimmt sich nach (14) aus

$$\mathrm{ch}^2 \frac{\varrho}{c} = -\tan^2 \psi .$$

Es ist demnach konsequent, (p) als den Mittelpunkt von (25) zu bezeichnen.

Führt man im $\mathbf{L}_n$ eine Verschiebung $V_n(\lambda)$ aus (§ 1, Beispiel 2), so transformiert sich (25) in die allgemeinere Gestalt:

$$F_{xx} - \left[e^{\lambda}(c\,x_0 - x_n) + k_\nu\, x_\nu \cot \psi\right]^2 = 0 . \tag{36}$$

Da $V_n(\lambda)$ den Punkt M ungeändert lässt, das Parallelenbündel M also in sich selbst transformiert, so stellt (36) einen Isogonalraum desselben Parallelenbündels für denselben Neigungswinkel ψ dar, denn die Winkel an den Schnittstellen des Gebildes mit dem Bündel bleiben bei Bewegungen invariant. (36) geht notwendigerweise durch M, trifft aber ausserdem die in die n-Achse fallende Parallele des Bündels nicht mehr im Ursprung, sondern im Punkt, dessen unhomogene Koordinate x_n gleich $c\,\mathrm{th}\,\lambda$ ist, also, wie aus (21) folgt, in der Entfernung $q = c\,\lambda$ vom Ursprung. Für $\lambda = 0$ gelangt man zu (25) zurück.

Die Gleichung

$$F_{xx} - e^{2\lambda}\left[(c\,x_0 - x_n) + k_\nu\, x_\nu \cot \psi\right]^2 = 0 \tag{37}$$

unterscheidet sich von (36), wie leicht zu ersehen, nur dadurch, dass $e^{\lambda} \cot \psi$ an die Stelle von $\cot \psi$ tritt. Es handelt sich bei (37) also wieder um einen Isogonalraum des Bündels M, jedoch mit einem geänderten Neigungswinkel, der eine Funktion von λ bildet. Bei $\lambda = 0$ geht auch (37) in (25) über. Nun hat aber (37) bei veränderlichem λ beständig ein und denselben Mittelpunkt (p), wie man erkennt, wenn man auf die Definition von (p) als Pol zurückgeht. Sämtliche Isogonalräume (37) bei variablem λ und konstantem ψ sind also konzentrisch (die Isogonal-

räume (36) dagegen nicht!). Solche konzentrische Isogonalräume erweisen sich als paarweise äquidistant, wie gewöhnliche konzentrische Sphären; die Differenz der komplexen Radien ϱ wird eine reelle konstante Zahl.

§ 4. **Die Lobatschewski'schen Grenzsphären.** Im Spezialfall $\psi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sowohl (36) als (37):

$$F_{xx} - e^{2\lambda}(c\,x_0 - x_n)^2 = 0\,. \tag{38}$$

Dieses Gebilde heisst nach Lobatschewski eine Grenzsphäre (von $n-1$) Dimensionen). Eine eindimensionale Grenzsphäre heisst ein Grenzkreis. Wir bezeichnen die Grenzspäre mit $\mathbf{E}_{n-1}$.

M ist der einzige u. f. Punkt von $\mathbf{E}_{n-1}$, die Grenzsphäre zerfällt also nicht mehr in zwei Gebiete, sondern liefert ein einziges zusammenhängendes eigentliches Gebiet. Der Pol (35), also der Mittelpunkt der Grenzsphäre, fällt mit M zusammen. Solange von Grenzsphären die Rede ist, sprechen wir demnach vom Mittelpunkt M. Die Grenzsphäre ist eine uneigentliche $(n-1)$-dimensionale Sphäre mit u. f. Mittelpunkt. Es existiert nur ein einziges Parallelenbündel, nämlich das Bündel M, für welches die Grenzsphäre die Isogonaleigenschaft zeigt, und zwar schneidet die Grenzsphäre dieses Parallelenbündel orthogonal. Bei variablem λ bestimmt (38) eine Schar konzentrischer Grenzsphären. (38) trifft die n-Achse in der Entfernung $q = c\lambda$ vom Ursprung. Für $\lambda = 0$ erhält man die Grenzsphäre in spezieller Lage:

$$F_{xx} - (c\,x_0 - x_n)^2 = 0\,. \tag{39}$$

Das Gebilde (39) geht durch den Ursprung.

Da ein Paar eigentlicher Sphären und ebenso auch ein Paar uneigentlicher Sphären mit ideellem Mittelpunkt die Eigenschaft der Äquidistanz zeigt, sobald der Mittelpunkt im Paar gemeinsam ist, so kann man durch eine Stetigkeitsbetrachtung folgern, dass für ein Paar uneigentlicher Sphären mit gemeinsamem unendlich fernem Mittelpunkt gleichfalls diese Eigenschaft bestehen muss. D. h. also:

Zwei konzentrische Grenzsphären sind stets äquidistant.

Es macht keine Schwierigkeiten, dies auf Grund von (14) auch direkt zu verifizieren; wir wollen uns dabei nicht aufhalten.

Im weiteren wird häufig eine Parameterdarstellung von (38) Verwendung finden, die folgendermassen erhalten werden kann:

Es sollen von nun an durchweg unhomogene Koordinaten benutzt, also die Null-Koordinate gleich 1 gesetzt werden. Es sei (s) mit den Koordinaten s_ν ein variabler Punkt im $\mathbf{L}_{n-1}$, wo $x_n = 0$; (ζ) bedeute den Mittelpunkt M. Wir suchen die Koordinaten desjenigen von M verschiedenen Punktes (x), wo die Gerade $us + w\zeta$ das Gebilde (38) trifft. Infolge der Unhomogenität ist beständig $u + w = 1$. Die Schnittbedingung fordert, da $s_n = 0$:

$$F_{us+w\zeta,\, us+w\zeta} - u^2 c^2 e^{2\lambda} = 0 ,$$

woraus, wenn man s^2 für $s_\nu s_\nu$ schreibt, folgt:

$$u = \frac{2c^2}{c^2(1+e^{2\lambda}) + s^2} .$$

Nun ist aber $x_\nu = us_\nu$, $x_n = cw = c - cu$, also $c - x_n = cu$. Führt man den Wert von u ein, so ergibt sich die gesuchte Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x_\nu &= \frac{2c^2 s_\nu}{c^2(1+e^{2\lambda}) + s^2} , \\ c - x_n &= \frac{2c^3}{c^2(1+e^{2\lambda}) + s^2} . \end{aligned} \tag{40}$$

Sämtliche durch den Mittelpunkt gehenden ebenen Schnitte von (38) sind Isogonen vom Neigungswinkel $\frac{\pi}{2}$, also Grenzkreise.

Die Länge eines Grenzkreisbogens berechnet man am einfachsten, wenn man seine Ebene in die n & 1-Ebene und den einen Endpunkt in den Ursprung legt. Wendet man noch die Parameterdarstellung (40) an, wobei offenbar $s_2 = s_3 = \ldots = s_{n-1} = 0$, $s_1 = s$ zu nehmen ist, so folgt aus (15) nach einiger Rechnung für das Bogenelement $d\varrho$:

$$d\varrho^2 = ds^2 .$$

Da bei $s = 0$ die Bogenlänge ϱ auch 0 ist, so hat man bei geeigneter Wahl des Vorzeichens demnach:

$$\varrho = s .$$

Nun ist aber die 1-Achse in dieser speziellen Lage die Tangente an den Grenzkreis im Ursprung als Berührungspunkt, und nach (21) wird

$$s = c \operatorname{th} \frac{l}{c},$$

wenn l die mit passendem Vorzeichen versehene Länge des Tangentenabschnittes vom Berührungspunkt bis zum Schnitt (s) mit der durch den zweiten Endpunkt des Grenzkreisbogens geführten, zum Bündel M gehörigen Parallelen bedeutet. Fasst man alles das zusammen, und beachtet, dass die spezielle Lage des Bogenstückes für die Resultate der Längenmessung unwesentlich ist, so folgt:

> Die Länge eines Grenzkreisbogens ist gleich $c \operatorname{th} \frac{l}{c}$, wobei l die Länge der in einem Endpunkt an diesen Bogen gelegten Tangente ist, gemessen vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der durch den anderen Endpunkt des Bogens gehenden Normalen.

Der Schnitt der Tangente mit der erwähnten Normalen braucht hierbei nicht notwendig im eigentlichen Gebiet zu liegen.

Wir betrachten nun ein aus Grenzkreisen gebildetes rechtwinkliges Dreieck im $\mathbf{E}_{n-1}$. Man kann den Scheitel des rechten Winkels in den Ursprung und die Katheten, deren Längen s_1 und s_2 sein mögen, entsprechend in die n & 1-Ebene und in die n & 2-Ebene gelegt denken; die Endpunkte der Katheten seien dann (x) und (y). Gesucht sei die Länge s der Hypotenuse, d. h. des (x) mit (y) verbindenden Grenzkreises. Nach dem soeben bewiesenen Satz findet man s, indem man in (x) eine Tangente an die Hypotenuse legt und die Länge l dieser Tangente von (x) bis zum Schnitt (η) mit der n & 2-Ebene bestimmt; es wird dann

$$s = c \operatorname{th} \frac{l}{c}.$$

Eine Berechnung auf Grund von (31) und (40) ergibt:

$$\eta_2 = -\frac{2\,c^2\,s_2}{s_1^2 - 2\,c^2}, \quad \eta_n = \frac{c\,s_1^2}{s_1^2 - 2\,c^2}.$$

Mit Hilfe von (40) findet man hierauf:

$$F_{xx} = \frac{4\,c^6}{(2\,c^2 + s_1^2)^2}\,,$$

$$F_{x\eta} = \frac{4\,c^6}{(2\,c^2 + s_1^2)\,(2\,c^2 - s_1^2)}\,,$$

$$F_{\eta\eta} = \frac{4\,c^4\,(c^2 - s_1^2 - s_2^2)}{(2\,c^2 - s_1^2)^2}\,.$$

Auf Grund von (14) folgt hieraus durch einfache Rechnung:

$$s^2 = c^2\,\mathrm{th}^2\,\frac{l}{c} = s_1^2 + s_2^2\,,$$

m. a. W., im rechtwinkligen Grenzkreisdreieck gilt der Satz des Pythagoras.

Es soll nun noch der Winkel in demselben rechtwinkligen Dreieck an der Ecke (x), also der Winkel φ zwischen den s und s_1 in (x) berührenden Tangenten, bestimmt werden. Die Tangente an s_1 trifft die n-Achse in einem solchen Punkt (ζ), wo $\zeta_n = \eta_n$ wird, wie man leicht verifiziert. Man hat daher:

$$F_{x\zeta} = F_{x\eta}\,, \quad F_{\eta\zeta} = F_{\zeta\zeta} = c^2 - \eta_n^2$$
$$= \frac{4\,c^4\,(c^2 - s_1^2)}{(2\,c^2 - s_1^2)^2}\,.$$

Aus der Formel (16) berechnet sich dann

$$\cos\varphi = \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \frac{s_1}{s}\,.$$

Der Kosinus des Winkels bei (x) ist also, genau ebenso wie in der euklidischen Geometrie, als Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse definiert. Da auch der pythagoräische Satz gilt, so ist mithin die Trigonometrie im Netz der Grenzkreise überhaupt identisch mit der euklidischen, solange man sich auf ein beliebig grosses, jedoch endliches Stück des $\mathbf{E}_{n-1}$ beschränkt. Daraus folgt u. a., dass die Grenzkreise kürzeste im $\mathbf{E}_{n-1}$ verlaufende Linien sind. Ein im $\mathbf{E}_{n-1}$ lokalisierter Beobachter wird die Grenzkreise infolge dieser ihrer geodätischen Eigenschaft als Gerade auffassen und den $\mathbf{E}_{n-1}$ als euklidischen Raum interpretieren. Für einen aussenstehenden, im $\mathbf{L}_n$ frei beweglichen Beobachter erscheint dieser euklidische Raum $\mathbf{E}_{n-1}$ in den nichteuklidischen u. zw. hyperbolischen Raum $\mathbf{L}_n$ eingebettet.

Fasst man das Unendlichferne eines euklidischen Raumes, wie es z. B. für 2 Dimensionen in der Funktionentheorie geschieht, als einen einzigen Punkt auf, so macht es keine prinzipiellen Schwierigkeiten, den Einbettungsraum von nächsthöherer Dimensionszahl als hyperbolisch mit einer beliebigen charakteristischen Konstanten c zu denken. Natürlich kann man den Einbettungsraum, wie es naheliegt, auch ebenfalls euklidisch wählen. Welche Wahl man trifft, hängt von Zweckmässigkeitserwägungen, nicht aber von der Natur der Dinge ab. Minkowski wählte für seine Raumzeitwelt[4]) den zweiten Weg, weil das Phänomen der Weltexpansion damals noch unbeachtet resp. unbeobachtet war. Will man aber diese Expansion mitberücksichtigen, so ist der erste Weg mathematisch bequemer.

Wählt man bei $\lambda = 0$ im Gebilde (38) die in den n & ν-Ebenen liegenden $n-1$ Grenzkreise als euklidisch-cartesische Koordinatenachsen und versteht unter s die im $\mathbf{E}_{n-1}$, also längs einem Grenzkreis gemessene Entfernung eines Punktes des Gebildes vom Ursprung, so sind die euklidischen Koordinaten s_ν dieses Punktes im $\mathbf{E}_{n-1}$ durch

$$s_\nu = s \cdot \cos \varphi_\nu \tag{41}$$

bestimmt, wenn φ_ν der Winkel zwischen dem Bogen s und der ν-Achse ist. Projiziert man nun diesen Punkt aus M auf den mittels $x_n = 0$ definierten Berührungsraum $\mathbf{L}_{n-1}$, so ist die hyperbolische (geradlinige) Entfernung l der Projektion vom Ursprung durch

$$c \operatorname{th} \frac{l}{c} = s$$

gegeben, und die Verbindungsgerade mit dem Ursprung bildet mit den hyperbolischen Achsen dieselben Winkel φ_ν. Nach (21) und (23) wird daher die hyperbolische Koordinate x_ν dieser Projektion als

$$x_\nu = c \cdot \operatorname{th} \frac{l}{c} \cdot \cos \varphi_\nu = s \cdot \cos \varphi_\nu = s_\nu$$

erkannt. M. a. W., die euklidischen Koordinaten eines Punktes unseres $\mathbf{E}_{n-1}$ sind mit den hyperbolischen Koordinaten der erwähnten Zentralprojektion dieses Punktes im Berührungsraum

[4]) „Raum und Zeit", Vortrag in Köln 1908, abgedruckt Phys. Ztschr. 10 (1909).

$\mathbf{L}_{n-1}$ identisch. Beachtet man nun, dass diese Projektion als derjenige Punkt (s) des $\mathbf{L}_{n-1}$ aufgefasst werden darf, den wir bei der Parameterdarstellung (40) benutzten, so folgt:

> In der Parameterdarstellung (40) kann man die s_ν auch als euklidische Koordinaten deuten, u. zw. als Koordinaten desjenigen Punktes von (39), der auf der Verbindungsgeraden von M mit dem durch (40) dargestellten Punkt von (38) liegt.

Führt man die Verschiebung $V_n(\lambda)$ aus, die (39) ohne Drehung in (38) überführt, so geht der ursprüngliche Berührungsraum $x_n = 0$ in eine neue Lage $x_n = c \operatorname{th} \lambda$ über; dieser neue Berührungsraum wird von der durch M und (s) gehenden Geraden in einem Punkt (η) getroffen, für den man

$$\eta_\nu = (1 - \operatorname{th} \lambda)\, s_\nu\,, \quad \eta_n = c \operatorname{th} \lambda$$

findet. Die euklidischen Koordinatenachsen von (39) werden durch $V_n(\lambda)$ in solche Grenzkreise von (38) übergeführt, die entsprechend in den n & ν-Ebenen von $\mathbf{L}_n$ liegen, sich daher auf der n-Achse schneiden, u. zw. in einem Punkt (ξ), wo $\xi_n = c \operatorname{th} \lambda$ ist. Bedeutet l' die hyperbolische Entfernung von (ξ) bis (η), so wird nach (14)

$$c \operatorname{th} \frac{l'}{c} = e^{-\lambda} \sqrt{s_\nu\, s_\nu} = e^{-\lambda} s\,, \tag{42}$$

denn $\sqrt{s_\nu\, s_\nu} = s$. Ist nun A derjenige Punkt, wo die durch M, (s) und (η) gehende Gerade das Gebilde (38) trifft, so wird offenbar $c \operatorname{th} \frac{l'}{c}$ gleich sein der Länge s' des Grenzkreisbogens von (ξ) bis A in (38). Weil nun $V_n(\lambda)$ eine Verschiebung ohne Drehung ist, andrerseits der letztgenannte Grenzkreis in der durch (s) und die n-Achse gehenden hyperbolischen Ebene liegt, so ist dieser Grenzkreis als Ganzes aus dem in (39) vom Ursprung nach (s) gehenden Grenzkreise als Ganzes durch die genannte Verschiebung entstanden. Daher bildet der Grenzkreis durch (ξ) und A mit den verschobenen euklidischen Koordinatenachsen dieselben Winkel φ_ν, wie der anfänglich in (39) gelegene, durch den Ursprung und (s) geführte Grenzkreis mit

der dortigen anfänglichen Lage der euklidischen Achsen. Die euklidischen Koordinaten s'_ν des Punktes A in (38) werden daher

$$s'_\nu = s \cdot e^{-\lambda} \cos \varphi_\nu = s_\nu \cdot e^{-\lambda}. \tag{43}$$

Wegen der fundamentalen Bedeutung dieser Relation für alles nachfolgende soll der in (43) enthaltene Gedanke noch in Satzform ausgesprochen werden:

> Verschiebt man eine Grenzsphäre im $\mathbf{L}_n$ ohne Drehung längs der beständig durch den euklidischen Ursprung dieser Grenzsphäre gehenden Normalen um eine Strecke $q = c\lambda$, so unterscheiden sich die euklidischen Koordinaten der beiden Schnittpunkte mit einer beliebigen anderen Normalen um den Proportionalitätsfaktor $e^{-\lambda}$.

Eine solche Verschiebung ist also gleichbedeutend mit einer Ähnlichkeitstransformation des $\mathbf{E}_{n-1}$, mit dem Ursprung als Fixpunkt und $e^{-\lambda}$ als Vergrösserungsfaktor.

Natürlich sind auf derselben Normalen gelegene Punkte der Grenzsphären, d. h. entsprechende Punkte der Ähnlichkeitstransformation, im allgemeinen durchaus nicht entsprechende Punkte der Verschiebung.

§ 5. **Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit im Weltraum.** Zum Aufbau einer Kinematik bedarf man gewisser Hypothesen, die eine analoge Rolle spielen, wie die Axiome in der Geometrie. Es sollen demnach im folgenden Hypothesen formuliert werden, die wir unserer expansionistischen Kinematik zugrunde legen. Eine vollständige Aufzählung sämtlicher Hypothesen kinematischen Charakters ist hierbei nicht beabsichtigt, auch soll die Frage der gegenseitigen Abhängigkeit nicht untersucht werden. Die Widerspruchslosigkeit der Hypothesen wird durch die der ganzen Darstellung zugrunde liegende geometrische Interpretation gewährleistet. Uns interessieren hier bloss die Konsequenzen dieser Hypothesen; nur Konsequenzen sind ja überhaupt der experimentellen Nachprüfung zugänglich und deshalb von dauernder Bedeutung. Die Hypothesen sind hier so gewählt, dass sie das Phänomen der Weltexpansion zu einem integrierenden Bestandteil der Kinematik machen.

Hypothese I: Der dreidimensionale Weltraum erweist sich als im grossen euklidisch, wenn man Messungen mittels „starrer" Massstäbe ausführt und Ausbreitungsbahnen von Fernwirkungen als im allgemeinen gerade Linien deutet. Relativ kleine Abweichungen von der euklidischen Metrik (Krümmungen des Weltraumes) werden durch anwesende Massen bedingt und tragen bloss lokalen Charakter.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns nicht mit dem tatsächlichen, lokal etwas gekrümmten Weltraum $\mathbf{E}'_3$, sondern mit dem streng euklidischen $\mathbf{E}_3$, aus welchem dieser $\mathbf{E}'_3$ durch geringfügige lokale Deformationen entstanden gedacht werden kann. M. a. W., die durch Massennähe bedingten lokalen Krümmungen sollen durchweg vernachlässigt werden.

Im $\mathbf{E}'_3$ sind Massenpunkte verteilt; in jedem Massenpunkt kann ein Beobachter gedacht werden. Die Bezeichnungen „Massenpunkt" und „Beobachter" sollen fernerhin als Äquivalente gelten.

Wir fixieren irgendeinen bestimmten Beobachter. Dieser kann sich durch „Fernsignale" (Lichtsignale) mit anderen Beobachtern verständigen. Der fixierte Beobachter soll auf irgendeine Weise eine Längeneinheit (cm) und eine Zeiteinheit (sec) definieren und diese seine Definition dann anderen mitteilen, die danach gleichfalls jeder für sich cm- und sec-Etalone anfertigen.

Durch Messungen mit seinen Etalonen findet der fixierte Beobachter eine Strecke c, die er zunächst als Entfernung deuten möge, die von einem Fernsignal in der Zeit 1 sec überbrückt wird (es wird sich später zeigen, dass diese provisorische Auffassung einer kleinen Korrektur bedarf). Messungen haben ergeben:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} . \tag{44}$$

Der fixierte Beobachter denke sich nun einen $\mathbf{L}_4$, in dem die charakteristische Konstante genau den durch (44) angegebenen Wert c hat, und denke sich seinen Weltraum $\mathbf{E}_3$ als dreidimensionale Grenzsphäre in diesen $\mathbf{L}_4$ eingebettet. Dies ist mathe-

matisch statthaft, involviert also keine besondere kinematische Hypothese. Wohl aber soll folgende, mit den bisherigen Erfahrungen übereinstimmende Hypothese gelten:

Hypothese II: Jeder Beobachter findet, wenn er Messungen mit seinen cm- und sec-Etalonen ausführt, für c denselben Zahlenwert (44), d. h. sämtliche Beobachter operieren mit ein und demselben $\mathbf{L}_4$.

Der fixierte Beobachter wird nun zwei wesentlich verschiedene Koordinatensysteme verwenden können:

Erstens ein euklidisches im $\mathbf{E}_3$, wo die geodätischen Linien, vom $\mathbf{L}_4$ aus beurteilt, Grenzkreise sind. Den Ursprung dieses euklidischen Koordinatensystems denken wir uns stets dort, wo der fixierte Beobachter sich befindet. Dieses euklidische System bestimmt die Orte sämtlicher anderer Massenpunkte im $\mathbf{E}_3$, also im „Weltraum" des fixierten Beobachters.

Zweitens ein vierdimensionales hyperbolisches im $\mathbf{L}_4$, zur Bestimmung der Lage des Weltraumes $\mathbf{E}_3$ im $\mathbf{L}_4$. Die hyperbolische 4-Achse soll hierbei ständig durch den Ort des fixierten Beobachters im $\mathbf{L}_4$ und den Mittelpunkt M des $\mathbf{E}_3$ hindurchgehen, also jedenfalls orthogonal zum Weltraum gerichtet sein. Als positive Richtung der 4-Achse sei die Richtung nach M hin gewählt. Ferner sollen die euklidischen Achsen in jeder Epoche ein und dieselben Neigungswinkel gegen die hyperbolischen n & ν-Ebenen besitzen. Wir sagen dann, der fixierte Beobachter habe sich auf den Ruhezustand orientiert. Dieser Wortgebrauch stützt sich u. a. auf eine zunächst noch unscharfe Vorstellung vom Nichtvorhandensein einer „Rotation" der Achsen. Eine präzisere Fassung gewinnt diese Vorstellung erst später, nach Einführung der Hypothese VI (§ 6). Der analytischen Einfachheit halber machen wir weiterhin stets die Annahme, dass die obenerwähnten Neigungswinkel gleich 0 sind, dass also die euklidischen ν-Achsen in den n & ν-Ebenen liegen; der Richtungssinn der hyperbolischen und der euklidischen ν-Achsen soll hierbei übereinstimmen.

Jeder beliebige Beobachter soll sich auf den Ruhezustand orientieren können. Wir fordern nun die Gültigkeit des Relativitätspostulates:

Hypothese III: Sämtliche auf den Ruhezustand orientierten Beobachter sind gleichberechtigt, d. h. universelle, für jeden Punkt des $\mathbf{E}_3$ in jeder Epoche gültige Naturgesetze verhalten sich beim Übergang von einem solchen Beobachter zu einem anderen kovariant.

Die Gesamtheit der Normalen des $\mathbf{E}_3$ bildet vom Standpunkt des auf den Ruhezustand orientierten fixierten Beobachters das Bündel paralleler Gerader mit dem Scheitel M im Mittelpunkt des $\mathbf{E}_3$. Diese Normalen mögen die Zeitrichtungen in den betreffenden Punkten des $\mathbf{E}_3$ heissen.

Wir formulieren nun die nächste Hypothese, die von fundamentaler Bedeutung für die Erfassung des Expansionsphänomens ist:

Hypothese IV: Ein jeder Massenpunkt verschiebt sich in der Zeitrichtung weg von M. Durch diese erzwungene Verschiebung wird der $\mathbf{E}_3$ mitgeführt, u. zw. nicht nur an der betreffenden Stelle, sondern, infolge eines elastischen Zusammenhanges, als Ganzes. Der $\mathbf{E}_3$ setzt dieser Verschiebung einen starken Widerstand entgegen, indem er sich jeder Ortsänderung im $\mathbf{L}_4$ widersetzt, und übt so auf die Verschiebung der Massen in der Zeitrichtung eine Bremswirkung aus.

Durch diese Bremswirkung ist ein lokaler Druck der Massen auf den elastisch etwas dehnbar gedachten $\mathbf{E}_3$ bedingt; dieser Druck soll sich im $\mathbf{E}_3$ mit Fernsignalgeschwindigkeit ausbreiten und auf diese Weise kleine Deformationen des $\mathbf{E}_3$ (lokale Krümmungen) bewirken, wodurch die Zeitrichtung lokal von der Normalenrichtung etwas abgelenkt erscheint, was dann Tangentialverschiebungen der Massen im $\mathbf{E}_3$ gegeneinander, also Gravitationserscheinungen zur Folge hat. Darauf soll aber in

der vorliegenden Abhandlung, wie schon gesagt, nicht näher eingegangen werden.

Infolge der Bremswirkung liegt es nahe anzunehmen, dass die „Fallgeschwindigkeit" der Massen in der Zeitrichtung jedenfalls nicht zunimmt. Wir machen die einfachste Annahme einer konstanten Fallgeschwindigkeit und geben dieser Annahme die folgende Form:

Hypothese V: Die vom fixierten Beobachter gemessene „Zeit" ist proportional der von ihm in der Zeitrichtung im $\mathbf{L}_4$ zurückgelegten Strecke.

Zeitmessungen im $\mathbf{E}_3$ sind demnach gleichbedeutend mit Niveaumessungen im Parallelenbündel M des $\mathbf{L}_4$.

Beträgt die Verschiebung des fixierten Beobachters in der Zeitrichtung von der Nullepoche an q cm, so wird, wenn t sec verflossen sind,

$$q = -\gamma t, \tag{45}$$

wobei γ die konstante „Fallgeschwindigkeit" des $\mathbf{E}_3$ im $\mathbf{L}_4$ darstellt. Das Minuszeichen in (45) ist zur Berücksichtigung der Fallrichtung eingeführt: bei positivem γ und positivem t hat man negative q-Werte.

Wir führen noch die Grössen

$$\sigma = \frac{\gamma}{c}, \quad \tau = \frac{c}{\gamma} = \sigma^{-1}, \quad \sigma\tau = 1 \tag{46}$$

ein. Wählt man als Nullepoche diejenige, wo der euklidische Ursprung des fixierten Beobachters mit dem hyperbolischen Ursprung im $\mathbf{L}_4$ zusammenfällt, so wird der in (38) eingehende, die jeweilige Lage des $\mathbf{E}_3$ kennzeichnende Parameter λ infolge $q = c\lambda$

$$\lambda = \frac{q}{c} = -\frac{\gamma}{c} t = -\sigma t\,. \tag{47}$$

In der Epoche t wird daher die Gleichung des sich im $\mathbf{L}_4$ verschiebenden $\mathbf{E}_3$ lauten:

$$e^{2\sigma t} \cdot F_{xx} - (c - x_4)^2 = 0\,, \tag{48}$$

was dann für $t = 0$ in (39) übergeht.

Die vom fixierten Beobachter bestimmten euklidischen Koordinaten s_ν irgendeines sich in seinem Weltraum befindlichen

Massenpunktes werden Funktionen von t sein. Kennt man die s_ν und t, so ist damit auch die Lage des betreffenden Massenpunktes im $\mathbf{L}_4$ mittels (40) definiert, wenn man dort $-\sigma t$ statt λ einführt.

Projiziert man den Ort des Massenpunktes im $\mathbf{L}_4$ aus M auf (39), also auf die Lage des $\mathbf{E}_3$ in der Nullepoche, so erhält man einen Ort, den wir als den reduzierten Ort des Massenpunktes im $\mathbf{E}_3$ ansprechen wollen. Entsprechend soll die Bahn des reduzierten Ortes im $\mathbf{E}_3$ die reduzierte Bahn des Massenpunktes genannt werden. Die euklidischen Koordinaten des reduzierten Ortes von (s) mögen mittels $\bar{s}_\nu$ bezeichnet werden. Laut (43) und (47) wird

$$s_\nu = \bar{s}_\nu \, e^{\sigma t} \, , \quad \bar{s}_\nu = s_\nu \, e^{-\sigma t} \, . \tag{49}$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich hieraus, wenn ein Punkt über dem Symbol den Differentialquotienten nach der Zeit andeutet:

$$\dot{s}_\nu = \frac{d\bar{s}_\nu}{dt} \, e^{\sigma t} + \sigma s_\nu \, .$$

Der euklidische Vektor $\frac{d\bar{s}_\nu}{dt} \, e^{\sigma t}$, den wir abkürzend mit v_ν bezeichnen, soll die Eigengeschwindigkeit heissen; den euklidischen Vektor σs_ν, abgekürzt u_ν, nennen wir die Expansionsgeschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes. Es wird also

$$\dot{s}_\nu = v_\nu + u_\nu \, . \tag{50}$$

Die Eigengeschwindigkeit v_ν enthält wohl scheinbar den reduzierten Ort, ist aber tatsächlich von der Wahl der Nullepoche unabhängig, denn sowohl $\dot{s}_\nu$ als auch σs_ν sind ja offenbar von der Nullepoche unabhängig. Bei der Substitution $t - t_0$ statt t, wobei t_0 eine beliebige Konstante bedeutet, bleibt also v_ν ungeändert.

Ist beständig $v_\nu = 0$, so muss $\frac{d\bar{s}_\nu}{dt} = 0$ sein, d. h. die reduzierte Bahn schrumpft auf einen Punkt zusammen. Dies findet offenbar dann und nur dann statt, wenn der betreffende Massenpunkt, gesehen im hyperbolischen Koordinatensystem des fixierten Beobachters, sich im $\mathbf{L}_4$ genau in der Zeitrichtung bewegt. Die Zeitrichtung des betreffenden Massenpunktes, wenn er sich auf den Ruhezustand orientiert, wird also mit der vom

fixierten Beobachter für ihn angegebenen Zeitrichtung übereinstimmen, und die Strecke q, um die er sich in dieser Zeitrichtung während eines Zeitintervalles verschiebt, wird der Grösse nach übereinstimmen mit der entsprechenden Strecke q des fixierten Beobachters für dasselbe Zeitintervall. Beide Beobachter werden also im Spezialfall $v_\nu = 0$ Zeitintervalle vollkommen übereinstimmend beurteilen, also kurz ausgedrückt, identisches Zeitmass verwenden.

Wir betrachten nun den fixierten und einen zweiten Beobachter, für den die Eigengeschwindigkeit gleich Null ist; die euklidischen Achsen dieser beiden Beobachter im $\mathbf{E}_3$ mögen entsprechend parallel gewählt sein. Es seien nun s'_ν die euklidischen Koordinaten irgendeines dritten Massenpunktes nach Ansicht des fixierten, und s''_ν die Koordinaten desselben dritten Massenpunktes nach Ansicht des zweiten Beobachters. Da es sich um euklidische Geometrie bei parallelen Achsen handelt, wird $s''_\nu = s'_\nu - s_\nu$ sein, wenn s_ν die Koordinaten des zweiten Beobachters in bezug auf den fixierten sind. Für die reduzierten Koordinaten $\bar{s}'_\nu$ und $\bar{s}''_\nu$ findet man aus $\bar{s}'_\nu = s'_\nu e^{-\sigma t}$, $\bar{s}''_\nu = s''_\nu e^{-\sigma t}$, da t in beiden Fällen ein und dieselbe Grösse bedeutet (vorausgesetzt, dass die Nullepochen übereinstimmen):

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{s}'_\nu}{dt} e^{\sigma t} &= \dot{s}'_\nu - \sigma s'_\nu \\
&= \dot{s}_\nu + \dot{s}''_\nu - \sigma s'_\nu \\
&= \sigma s_\nu + \dot{s}''_\nu - \sigma s'_\nu \\
&= \dot{s}''_\nu - \sigma s''_\nu \\
&= \frac{d\bar{s}''_\nu}{dt} e^{\sigma t},
\end{aligned}$$

denn infolge $v_\nu = 0$ ist $\dot{s}_\nu = \sigma s_\nu$. Dieses Ergebnis zeigt, dass der dritte Massenpunkt nach Ansicht sowohl des fixierten, als auch des zweiten Beobachters ein und dieselbe Eigengeschwindigkeit

$$\frac{d\bar{s}'_\nu}{dt} e^{\sigma t} = \frac{d\bar{s}''_\nu}{dt} e^{\sigma t}$$

besitzt. Für zwei solche Beobachter mit übereinstimmendem Zeitmass ist also die Eigengeschwindigkeit eines beliebigen dritten Massenpunktes eine Invariante. Ist speziell diese Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt des fixierten Beobachters gleich

Null, so ist sie es auch vom Standpunkt des zweiten Beobachters, und der dritte Punkt hat dann wieder mit den beiden ersten übereinstimmendes Zeitmass.

Die Gesamtheit solcherweise definierter Beobachter mit gleichem Zeitmass bildet ein System, in dem jeder nach Ansicht eines jeden anderen die Eigengeschwindigkeit Null besitzt, und sich im $\mathbf{L}_4$ also genau in der Zeitrichtung bewegt. Ein solches System von Beobachtern soll ein Inertialsystem heissen. Die Eigengeschwindigkeit eines beliebigen Massenpunktes hat in bezug auf einen beliebigen Beobachter aus einem Intertialsystem ein und denselben Wert; man darf daher von der Eigengeschwindigkeit des Massenpunktes in bezug auf das Inertialsystem sprechen. Bildet man noch auf dieselbe Art das Inertialsystem dieses Massenpunktes, so soll die Eigengeschwindigkeit des letzteren als Eigengeschwindigkeit des zweiten Inertialsystems in bezug auf das erste Inertialsystem bezeichnet werden.

Die Expansionsgeschwindigkeit eines beliebigen Massenpunktes wird dagegen als reine Ortsfunktion von verschiedenen Beobachtern in einem Inertialsystem stets verschieden beurteilt werden, wie aus der Definition der Expansionsgeschwindigkeit sofort abzulesen ist. Sind O und O' zwei ein und demselben Inertialsystem angehörige Beobachter, A ein von beiden beobachteter dritter Massenpunkt, so wird das linear σ-fach vergrösserte euklidische Dreieck OAO' drei Expansionsgeschwindigkeiten angeben: $\sigma \cdot \overrightarrow{OA}$ ist die Expansionsgeschwindigkeit von A in bezug auf O, $\sigma \cdot \overrightarrow{OO'}$ diejenige von O' in bezug auf O, endlich $\sigma \cdot \overrightarrow{O'A}$ diejenige von A in bezug auf O'. Wir fassen diesen Sachverhalt kurz im Satz zusammen: Die Expansionsgeschwindigkeiten addieren sich euklidisch.

Da die Expansionsgeschwindigkeit proportional der Entfernung wächst, die Eigengeschwindigkeit dagegen bei Änderung des Beobachters im Inertialsystem sich nicht ändert, so wird bei wachsender Distanz des beobachteten Objekts die Expansionsgeschwindigkeit stark überwiegen. Bei sehr grossen Entfernungen wird man praktisch nur die Expansionsgeschwindigkeit zu berücksichtigen haben. Aus bisherigen spektrosko-

pischen Beobachtungen abgeleitetes Zahlenmaterial ergibt für $\Delta t = 1$ sec[5]:

$$\frac{\Delta s}{s} = 1{,}6 \cdot 10^{-17}.$$

Deutet man $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unter Vernachlässigung von v_ν als reine Expansionsgeschwindigkeit $u = \sigma s$, so darf man

$$\sigma = \frac{\Delta s}{s \cdot \Delta t}$$

setzen und findet hiernach:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1} \\ \tau &= 6{,}2 \cdot 10^{16} \text{ sec} \\ \gamma &= \sigma c = 4{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ cm sec}^{-1}. \end{aligned} \tag{51}$$

Wir wollen die Näherungswerte (51) bei allen ferneren Zahlenbeispielen als Rechnungsgrundlagen benutzen. Danach „fällt" also der $\mathbf{E}_3$ im $\mathbf{L}_4$ um 1 cm in ca. $2 \cdot 10^6$ sec, d. h. in ungefähr 23 Tagen. Man hat natürlich in Betracht zu ziehen, dass die Zahlen (51) in Zukunft eine Korrektur erfahren werden. Auch die grundlegenden astrophysikalischen Formeln, die bei der Bearbeitung des Beobachtungsmaterials Verwendung finden, bedürfen einer Korrektur, wie im § 8 gezeigt werden soll.

§ 6. **Addition von Eigengeschwindigkeiten.** Bei Beobachtungen in relativ „kleinen", etwa intragalaktischen Entfernungen wird die Eigengeschwindigkeit dominieren, weil σ, wie (51) zeigt, sehr klein ist und demnach auch $u = \sigma s$ dann klein ausfällt. Diesbezügliche Messungen haben in diesem Rahmen die Berechtigung der Einstein'schen Kinematik indirekt bestätigt, oder zum mindesten nicht widerlegt. Dies weist darauf hin, dass die Addition von Eigengeschwindigkeiten sich nicht nach euklidischen Gesetzen, sondern, wie es die Relativitätstheorie implizite fordert, ohne zwischen Eigen- und Expansionsgeschwindigkeiten zu unterscheiden, nach Additionsgesetzen hyperbolischer Vektoren vollzieht. Unser System von Hypothesen muss daher noch in diesem Sinne ergänzt werden.

[5]) Nach einem Referat von D. Rootsman (Tartu Tähetorni Kalender 1935). E. Hubble and M. L. Humason, Astrophys. J. 74 (1931) „The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae" geben den Wert 558 km/sec per million parsecs, was $1{,}8 \cdot 10^{-17}$ sec^{-1} entspricht. Die Unsicherheit wird von Astronomen auf 20% eingeschätzt.

Wir denken uns den im $\mathbf{E}_3$ definierten euklidischen Vektor v mit den Komponenten v_ν einem hyperbolischen Vektor im $\mathbf{L}_4$ assoziiert. Der assoziierte hyperbolische Vektor werde als derjenige Tangentenabschnitt von der Länge l interpretiert, welcher gemäss § 4 die Länge v eines Grenzkreisbogens mittels

$$v = c \operatorname{th} \frac{l}{c}, \qquad v = \sqrt{v_\nu v_\nu} \tag{52}$$

bestimmt. Denkt man sich den euklidischen Vektor v als Grenzkreisbogenstück im $\mathbf{E}_3$ für die Epoche $t = 0$ an den Ursprung geheftet, so sind die Komponenten v_ν zugleich die hyperbolischen Koordinaten der Projektion des zweiten Endpunktes des Bogenstückes aus M auf den Berührungsraum $\mathbf{L}_3$ ($x_4 = 0$). Wir assoziieren nun den hyperbolischen Punkt (v) im $\mathbf{L}_3$ dem euklidischen Vektor v. Durch diesen Punkt (v) des $\mathbf{L}_3$ ist ein hyperbolischer Vektor bestimmt, der im $\mathbf{L}_3$ liegt, vom Ursprung ausgeht und in den Punkt (v) mündet; die Zuordnung dieses dem euklidischen Vektor aus $\mathbf{E}_3$ assoziierten hyperbolischen Vektors [6]) im Berührungsraum $\mathbf{L}_3$ ist eineindeutig. Je nachdem die Eigengeschwindigkeit v kleiner als c, gleich c oder grösser als c ist, wird der assoziierte Punkt im hyperbolischen $\mathbf{L}_3$ in das eigentliche, das unendlich ferne oder in das ideelle Gebiet fallen. Nur im ersten Falle $v < c$ wird der assoziierte hyperbolische Vektor ein eigentlicher sein, d. h. ausschliesslich aus eigentlichen Punkten des $\mathbf{L}_3$ bestehen. Der zweite Fall $v = c$ entspricht einem unendlich langen hyperbolischen Vektor, was als Grenzfall eigentlicher Vektoren gelten kann. Im dritten Falle wäre die Länge des assoziierten hyperbolischen Vektors eine komplexe Zahl.

Wir wollen nun bei der Bewegung von Massenpunkten überhaupt nur den Fall eines eigentlichen assoziierten Vektors als realisierbar ansehen, formulieren demnach die

Hypothese VI: Die Eigengeschwindigkeit eines Massenpunktes im $\mathbf{E}_3$ kann den Grenzwert c nicht erreichen, geschweige denn übersteigen.

Erst durch diese Forderung erhält die im § 5 erwähnte Vorstellung vom Nichtvorhandensein einer „Rotation" der Achsen

[6]) Diese Zuordnung verwendet faktisch V. Varičak in seiner Abhandlung „Über die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie" (Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. XXI, 1912).

einen präzisen Sinn. Solange keine obere Grenze für Eigengeschwindigkeiten festgesetzt ist, existiert kein durch „Nichtrotation“ ausgezeichnetes Achsensystem. In der vorliegenden Darstellung ist eben ein Achsensystem dann frei von Rotation (ein galileisches System), wenn die Hypothese VI erfüllt ist.

Fernsignale, die ja nicht durch eigentliche Massenbewegung ersetzt werden können, sondern auf einem Zusammenhang des $\mathbf{E}_3$ in sich beruhen, sollen sich im ungekrümmten $\mathbf{E}_3$ mit der Eigengeschwindigkeit c per sec ausbreiten. Im Interesse einer Vereinheitlichung der Kinematik wählen wir noch die folgende

Hypothese VII: Die Ausbreitung von Fernwirkungen im $\mathbf{E}_3$ erfolgt so, als ob es sich um eine Bewegung von Massen mit der Eigengeschwindigkeit c handelte.

Der Grenzwert c der Eigengeschwindigkeit wird also nach dieser Annahme bei einer Bewegung tatsächlicher Massen nie erreicht, wohl aber bei den auf Elastizität beruhenden Fernsignalen dennoch realisiert. Dies ist nicht paradoxaler, als die empirisch feststehende Tatsache, dass Fernwirkungen tatsächlich massenfreie Distanzen überbrücken. Ob man sich den Träger $\mathbf{E}_3$ der Fernwirkungen hierbei als Substanz (Äther), oder einfach als ein Gewebe geodätischer Linien vorstellt, ist für den mathematischen Kern der Sache ohne Belang.

Die euklidische Addition der Expansionsgeschwindigkeiten ist eine logische Konsequenz der Hypothesen IV und V. Es ist eine ebensolche logische Konsequenz von VI, dass Eigengeschwindigkeiten sich nicht gleichfalls euklidisch addieren können, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen übergeht, weil bei einer euklidischen Addition c erreicht und überschritten werden könnte.

Nach II und VII muss bei einem solchen Übergang von dem einen System zu dem anderen die Eigengeschwindigkeit c sich kovariant verhalten. Dies bedeutet in Übertragung auf die assoziierten hyperbolischen Vektoren im $\mathbf{L}_3$, dass einem Punkt des u. f. Gebildes

$$c^2 - v_\nu v_\nu = 0 \tag{53}$$

des $\mathbf{L}_3$ bei einem solchen Übergang stets wieder ein Punkt desselben Gebildes entsprechen muss. Nach § 1 ist es daher nahe-

liegend, diesen Übergang formal als eine Bewegungstransformation (4) des hyperbolischen Raumes $\mathbf{L}_3$ zu interpretieren. Wir kommen so zur

Hypothese VIII: Ist w eine Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt eines ersten Inertialsystems, w' die entsprechende Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt eines zweiten Inertialsystems, ferner v die Eigengeschwindigkeit des zweiten Systems in bezug auf das erste, so ist (w') im Berührungsraum $\mathbf{L}_3$ derjenige Punkt, in den (w) übergeht, wenn man den $\mathbf{L}_3$ längs dem v assoziierten hyperbolischen Vektor um die Länge dieses assoziierten Vektors in negativer Richtung verschiebt.

Der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen bedeutet also, kurz ausgedrückt, eine Addition der den Eigengeschwindigkeiten assoziierten hyperbolischen Vektoren im $\mathbf{L}_3$.

Wir wollen uns bei einer Aufzählung plausibler Gründe für die Hypothese VIII hier nicht aufhalten, sondern begnügen uns mit dem Hinweis, dass sie identisch ist mit dem Gesetz der Addition der Geschwindigkeiten nach der Einstein'schen Theorie, sobald man einfach von Geschwindigkeiten statt von Eigengeschwindigkeiten spricht, also $\sigma = 0$ setzt.

In analytischer Form ergeben sich die Formeln für eine Transformation der Eigengeschwindigkeit nach VIII aus (10), wenn man von einer möglichen Neigung der Achsen des einen Systems gegen die Achsen des anderen Systems absieht, also nur parallele Achsensysteme berücksichtigt. Da wir nun mit unhomogenen Koordinaten w_ν operieren, so tritt an die Stelle der homogenen Transformationsform (10) die gebrochene:

$$w_\mu = \frac{w'_\mu + (ch\,\omega - 1)\,a_\mu\,a_\nu\,w'_\nu + c\,a_\mu\,sh\,\omega}{\frac{1}{c}a_\nu\,\omega'_\nu\,sh\,\omega + ch\,\omega}, \tag{54}$$

wo a_ν die Richtungskosinus des Vektors v, also

$$a_\nu = \frac{v_\nu}{v}, \qquad v = \sqrt{v_\nu v_\nu} \tag{55}$$

bedeuten, und ω durch

$$v = c \operatorname{th} \omega \tag{56}$$

definiert ist.

Statt der abstrakten analytischen Formel kann man natürlich auch die anschaulichere Methode der direkten Betrachtung des aus den w, w' und v assoziierten hyperbolischen Vektoren zusammengesetzten Dreiecks im $\mathbf{L}_3$ anwenden.

Es folgen zwei Beispiele [7]):

1. Beispiel: (v) und (w) liegen auf einer Geraden, als welche man stets die 1-Achse wählen kann. Es ist dann $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$; $v_1 = v = c \operatorname{th} \omega$, $v_2 = v_3 = 0$; $w_1 = w$, $w_2 = w_3 = 0$. Nach (6) folgt nun sofort $w'_2 = w'_3 = 0$, also $w'_1 = w'$ und

$$w = \frac{w' \operatorname{ch} \omega + c \operatorname{sh} \omega}{\frac{1}{c} w' \operatorname{sh} \omega + \operatorname{ch} \omega} = \frac{v + w'}{1 + \frac{v w'}{c^2}},$$

also die bekannte Einstein'sche Formel, die sich dort aber auf Geschwindigkeiten überhaupt, hier bloss auf Eigengeschwindigkeiten bezieht. Führt man statt w, w', v entsprechende Längen $c\Theta$, $c\Theta'$, $c\omega$ assoziierter hyperbolischer Vektoren ein, so erhält diese Formel die prägnantere Gestalt

$$\operatorname{th} \Theta = \operatorname{th} (\omega + \Theta'). \tag{57}$$

2. Beispiel: Aberration. Ein und derselbe Lichtstrahl (Fernsignal) trifft den fixierten und den koinzidierenden, mit der Eigengeschwindigkeit v vorübereilenden Beobachter. Statt (54) soll die Trigonometrie des hyperbolischen Vektorendreiecks verwendet werden. In der Fig. 1 liegt die Spitze C des Vektorendreiecks

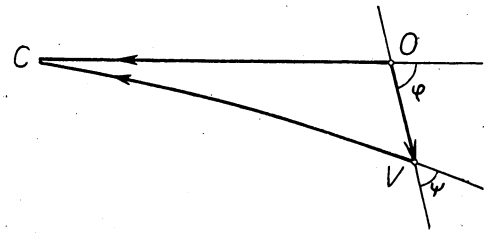

Fig. 1.

OVC im Unendlichen; OV stellt den v assoziierten hyperbolischen Vektor von der Länge $c\omega$ dar, OC die vom fixierten Beobachter gesehene Lichtgeschwindigkeit (assoziierter Vektor), VC dieselbe

7) Vgl. V. Varičak, l. c.

Lichtgeschwindigkeit vom Standpunkt des bewegten Beobachters. Der fixierte Beobachter sieht die Lichtquelle in einer um den Winkel φ gegen die Bahn des zweiten Beobachters geneigten Richtung; der zweite Beobachter schätzt diesen Winkel als ψ. Da auch in der hyperbolischen Geometrie ein Aussenwinkel im Dreieck stets grösser ist als ein nichtanliegender Innenwinkel, so wird sicher $\psi < \varphi$. Die Differenz $\delta = \varphi - \psi$ bildet den Aberrationswinkel. Eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie ergibt für den vorliegenden Fall eines imaginären Sphärenradius ci, wenn man in Betracht zieht, dass der Winkel bei C, wie aus dem Sinussatz folgt, gleich Null ist:

$$1 = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \operatorname{ch}\omega.$$

Dies bedeutet eine quadratische Gleichung für $\tan\psi$, aus der man für den richtigen, nämlich den kleineren Wert von ψ findet:

$$\tan\psi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi \operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega}.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung folgt hiernach:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi \operatorname{ch}\omega + \operatorname{sh}\omega}{\operatorname{ch}\omega + \cos\varphi \operatorname{sh}\omega},$$

oder, wenn man $\frac{v}{c}$ statt $\operatorname{th}\omega$ einführt:

$$\cos\psi = \frac{v + c \cdot \cos\varphi}{c + v \cdot \cos\varphi}. \tag{58}$$

Bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hätte man demnach $\cos\psi = \frac{v}{c}$, während die klassische Theorie $\cot\psi = \frac{v}{c}$ ergibt. Der Aberrationswinkel δ, der übrigens dem Flächeninhalt des Dreiecks OVC proportional ist, wird ein Maximum für

$$\cos\varphi = -\tan\frac{\omega}{2}.$$

Es ist dann $\psi = \pi - \varphi$ und

$$\sin\delta_{\max} = \frac{2\operatorname{th}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}},$$

was bei kleinem ω dem Wert $\frac{v}{c}$ nahe kommt.

Werden die Beobachter vertauscht, so hat man es mit den Nebenwinkeln von φ und ψ zu tun; in den Formeln bleibt dabei bei passender Änderung der Bezeichnungen alles beim alten. Es ist also prinzipiell gleichgültig, welcher der beiden Beobachter als der fixierte, welcher als der bewegte gilt. In der klassischen Theorie ist dies bekanntlich nicht der Fall.

Die hier angegebene Aberrationstheorie ist identisch mit der Einstein'schen, weil es sich um den gerade beim fixierten Beobachter, also in der Distanz Null, eintreffenden Lichtstrahl handelt, die Expansionsgeschwindigkeit also gleich Null ist und einzig die Eigengeschwindigkeit übrigbleibt. Dagegen wird im analytischen Ausdruck des Doppler-Effekts, wie im § 8 dargelegt werden soll, eine Abweichung von der Einstein'schen Theorie stattfinden, weil in dieser Frage die Entfernung der Lichtquelle vom Beobachter eine wesentliche Rolle spielt.

§ 7. **Translatorische Bewegung.** Die vom Massenpunkt im $\mathbf{E}_3$ beschriebene Bahn ergibt sich aus (50) durch Integration.

Ist die Eigengeschwindigkeit konstant, d. h. sind die v_ν von t unabhängig, so nennen wir die Bewegung eine translatorische, oder auch kurz eine Translation. Handelt es sich um Translation, so findet man aus (50):

$$\tau \log \frac{v_\nu + \sigma s_\nu}{v_\nu + \sigma S_\nu} = t,$$

wenn S_ν die euklidischen Koordinaten des Massenpunktes in der Epoche $t = 0$ sind. Hieraus folgt:

$$s_\nu = (S_\nu + \tau v_\nu)\, e^{\sigma t} - \tau v_\nu . \tag{59}$$

Da mithin

$$\frac{s_\nu + \tau v_\nu}{S_\nu + \tau v_\nu}$$

für alle ν den gleichen Wert hat, so ist die Bahn im $\mathbf{E}_3$ eine Gerade, u. zw. mit den Richtungskosinus

$$\frac{S_\nu + \tau v_\nu}{\sqrt{S_\nu S_\nu + \tau^2 v_\nu v_\nu + 2\tau S_\nu v_\nu}} . \tag{60}$$

Schreibt man hier S^2 für $S_\nu S_\nu$, v^2 für $v_\nu v_\nu$, so ist $S_\nu v_\nu$ als skalares Produkt von S und v gleich $S v \cos \Theta$, wenn Θ den Winkel

zwischen den Vektoren S und v bedeutet. Der Nenner in (60) wird dann

$$\sqrt{S^2 + \tau^2 v^2 + 2 S \tau v \cos \Theta}, \tag{61}$$

was identisch ist mit der Länge der dritten Seite eines euklidischen Dreiecks, in dem zwei Seiten entsprechend die Längen S und τv haben und den Winkel $\pi - \Theta$ einschliessen. Dies bezeugt, dass dieser Nenner nur dann gleich Null ausfällt, wenn S und τv gleich lang sind und $\pi - \Theta = 0$ wird, m. a. W., wenn der Vektor S mit dem Vektor $-\tau v$ identisch ist. In diesem singulären Fall zeigt aber dann (59) $s_\nu = S_\nu$, d. h. der Massenpunkt verbleibt im $\mathbf{E}_3$ die ganze Zeit über an einem Ort, obgleich er eine von Null verschiedene Eigengeschwindigkeit besitzt: letztere wird dann eben von der Expansionsgeschwindigkeit kompensiert. Diese scheinbare Gleichgewichtslage ist eine labile; beim Übergang zu einem beliebigen anderen Beobachter innerhalb desselben Inertialsystems wird die Kompensation zerstört. Andererseits lässt sich für einen vorgegebenen in Translation begriffenen Massenpunkt in einem vorgegebenen Inertialsystem stets ein und nur ein Beobachter angeben, für den die Bewegung des erwähnten Massenpunktes einen solchen singulären Charakter zeigt, allerdings unter der fingierten Voraussetzung, dass man Beobachter im Inertialsystem kontinuierlich verteilen kann. Bei derselben Fiktion wird ein beliebiger Beobachter aus einem Inertialsystem in einem beliebigen anderen Inertialsystem einen und nur einen Fixpunkt konstatieren. Die Wahrscheinlichkeit einer tatsächlichen Beobachtung derartiger Singularitäten am Sternenhimmel ist sehr gering, weil wirkliche Beobachter nur an vereinzelten Stellen des Weltraumes auftreten.

Wir wenden uns nun zum allgemeinen, nicht singulären Fall. Wäre $\sigma = 0$, also keine Expansionsgeschwindigkeit vorhanden, so müssten die Richtungskosinus der Bahngeraden proportional den v_ν sein. Der Einfluss des Expansionskoeffizienten σ äussert sich also zunächst in einer Ablenkung der Bahn. Da σ sehr klein ist, so wird diese Ablenkung nur für sehr grosse Werte von S_ν bemerkbar.

Die Bahn ist wohl geradlinig, erstreckt sich aber nur in der Richtung positiv wachsender Zeiten t ins Unendliche; bei negativ unbeschränkt wachsendem t nähert man sich auf

der Bahngeraden asymptotisch demjenigen Punkt des $\mathbf{E}_3$, dessen Koordinaten die Werte $-\tau v_\nu$ haben, wie aus (59) ersichtlich wird. Die Bahn ist also eine von diesem Punkt ausgehende Halbgerade. Den Anfangspunkt $(-\tau v)$ dieser Halbgeraden könnte man den Fluchtpunkt der Bahn nennen. Sämtliche Massenpunkte mit ein und derselben Eigengeschwindigkeit, also sämtliche ein und demselben Inertialsystem angehörige Punkte, zeigen ein und denselben Fluchtpunkt, scheinen also aus ein und demselben Punkt des Weltraumes hervorzuquellen. Im singulären Fall hat man statt der Halbgeraden nur noch den Fluchtpunkt $(-\tau v)$.

Für die kleine Eigengeschwindigkeit $v = 1$ cm sec^{-1} liegt der Fluchtpunkt in der Entfernung ca. $0{,}6 \cdot 10^{12}$ km, also weit hinter den wahrscheinlichen Grenzen unseres Planetensystems.

Die Fluchtpunkte für einen gegebenen Absolutwert von v liegen im $\mathbf{E}_3$ auf einer Sphäre vom Radius τv um den Beobachter herum. Die umfassendste dieser Sphären hat den Radius τc, d. h. ungefähr $6 \cdot 10^8$ Parsec. Diese grösste Sphäre soll die Sichtsphäre des Beobachters heissen. Sämtliche Fluchtpunkte liegen innerhalb der Sichtsphäre. Der fixierte Beobachter hält seine Sichtsphäre für unveränderlich, die Sichtsphären sämtlicher anderer zu seinem Inertialsystem gehörigen Beobachter dagegen für beweglich, jedoch so, dass vor genügend langer Zeit die Sichtsphäre eines beliebigen solchen Beobachters der seinigen beliebig nahe kam. Desgleichen sind die Fluchtpunkte nach Ansicht verschiedener Beobachter aus ein und demselben Inertialsystem verschieden, jedoch wird wiederum der Unterschied beliebig klein, wenn man genügend weit in die Vergangenheit zurückgreift.

Da der Fluchtpunkt stets innerhalb der Sichtsphäre liegt und die Bahn sich, ausgenommen den singulären Fall, ins Unendliche erstreckt, wenn t positiv wächst, so wird im allgemeinen für jede Eigengeschwindigkeit, auch für $v = 0$, die Bahn einmal die Sichtsphäre schneiden, der Massenpunkt also aus der Sichtsphäre heraustreten. Von jedem Inertialsystem wird auf die Dauer einzig und allein ein Massenpunkt, nämlich der singuläre, innerhalb der Sichtsphäre verbleiben. Der Austrittsmoment lässt sich zwar bei bekannten Daten theoretisch berechnen, nicht aber tatsächlich beobachten, aus Gründen, die im § 8 dargelegt werden sollen.

Die Bahnlänge eines in translatorischer Bewegung begriffenen Punktes für ein Zeitintervall Δt wird von verschiedenen Beobachtern aus ein und demselben Inertialsystem verschieden eingeschätzt werden, bildet also keine Invariante im Inertialsystem. Dagegen wird eine Invariante erhalten, wenn man den Ortsunterschied berechnet zwischen demjenigen Ort, wo der Massenpunkt im Moment t sich tatsächlich befindet, und demjenigen Ort, wo er sich befinden würde, wenn seine Eigengeschwindigkeit von einem fixierten, sonst aber beliebigen Moment t_0 an gleich Null wäre, d. h. wenn der Massenpunkt vom Moment t_0 an zum Inertialsystem des Beobachters gehören würde. Es handelt sich hierbei also um die Berechnung der Verschiebung relativ zum Inertialsystem des Beobachters.

Nach (59) bestimmt sich der Ort des Massenpunktes für die Epoche t_0 aus

$$s_\nu = (S_\nu + \tau v_\nu)\, e^{\sigma t_0} - \tau v_\nu \,.$$

Wenn nun im Laufe der nächsten $t - t_0$ Sekunden die Eigengeschwindigkeit des Punktes Null wäre, so hätte man nach § 4 für den Ort im Moment t die Koordinaten $s_\nu e^{\sigma(t-t_0)}$, also

$$\left[(S_\nu + \tau v_\nu)\, e^{\sigma t_0} - \tau v_\nu\right] e^{\sigma(t-t_0)},$$

oder

$$(S_\nu + \tau v_\nu)\, e^{\sigma t} - \tau v_\nu\, e^{\sigma \cdot \Delta t}, \quad \Delta t = t - t_0 \,.$$

In Wirklichkeit werden aber die Koordinaten des Massenpunktes im Moment t nach (59) lauten:

$$(S_\nu + \tau v_\nu)\, e^{\sigma t} - \tau v_\nu \,.$$

Für die euklidische Distanz D zwischen dem zuerst genannten fiktiven und dem wirklichen Ort findet man hieraus

$$D = \sqrt{\tau^2 (e^{\sigma \cdot \Delta t} - 1)^2 v_\nu v_\nu} = \tau v (e^{\sigma \cdot \Delta t} - 1) \,. \tag{62}$$

Diese Grösse D hängt nur von v und Δt ab, ändert sich also tatsächlich nicht beim Beobachterwechsel innerhalb eines Inertialsystems. Wir wollen D die relative Bahnlänge nennen.

Entwickelt man nach Potenzen von $\sigma \cdot \Delta t$, so folgt aus (62):

$$D = v \cdot \Delta t \left[1 + \frac{\sigma \cdot \Delta t}{2!} + \frac{(\sigma \cdot \Delta t)^2}{3!} + \ldots\right]. \tag{63}$$

Infolge der Kleinheit von σ ist demnach die klassische Formel

$$D = v \cdot \Delta t$$

für genügend kleine Zeitintervalle Δt eine sehr gute Annäherung. Bei $v = c$ und $\Delta t = 1$ sec würde die Korrektur ungefähr $+ 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ mm betragen. Dies besagt u. a., dass die im § 5 anlässlich der Hypothese II gegebene provisorische Definition der Konstanten c etwas berichtigt werden muss: in 1 sec wird vom Fernsignal im Inertialsystem des fixierten Beobachters nicht genau die Strecke c, sondern eine um etwa 25 Ångström-Einheiten grössere Entfernung überbrückt. Eine so präzise Bestimmung von c ist natürlich bei praktischer Messung undurchführbar.

Wäre $\sigma = 0$, also keine Expansion vorhanden, so würde D mit dem klassischen Begriff der bei gleichförmiger Bewegung durchlaufenen Bahnstrecke übereinstimmen. Auch bei der klassischen Auffassung handelt es sich aber hierbei im Grunde genommen stets um die Grösse der Verschiebung gegen das Inertialsystem des Beobachters.

§ 8. **Anwendung auf Fernsignale.** Auf Grund von VII sind Fernsignale wie translatorische Bewegungen mit der Grenzeigengeschwindigkeit c zu behandeln. Die Formel (62) gilt demnach auch für Fernsignale. Es sollen die Konsequenzen von (62) für diesen Spezialfall nun näher untersucht werden.

Es sei ϱ die Entfernung eines Objekts im $\mathbf{E}_3$ vom fixierten Beobachter in einem Moment t_0. Das Objekt sende in diesem Moment ein Fernsignal (Lichtstrahl) aus, das vom fixierten Beobachter im Moment $t_0 + L$ empfangen wird. Man hat dann $\Delta t = L$, und die relative Bahnlänge des Fernsignals vom Moment der Emission bis zum Moment des Empfanges wird nach (62) gleich $\tau c\,(e^{\sigma L} - 1)$. Indem wir die entsprechende Begriffsbildung der Relativitätstheorie verallgemeinern, nennen wir diese Grösse die dem Zeitintervall L entsprechende Lichtzeit l:

$$l = \tau c\,(e^{\sigma L} - 1). \tag{64}$$

Auf Grund der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der relativen Bahnlänge wird nun l gleich sein der Distanz, die die Lichtquelle im Moment $t_0 + L$ vom fixierten Beobachter

hätte, wenn sie vom Moment der Emission an zum Inertialsystem des fixierten Beobachters gehören würde, also gleich $\varrho e^{\sigma L}$. Aus der somit resultierenden Gleichung

$$\tau c\,(e^{\sigma L} - 1) = \varrho\, e^{\sigma L}$$

folgt, wenn man statt $\sigma\varrho$ die entsprechende Expansionsgeschwindigkeit u einführt, zunächst:

$$e^{\sigma L} = \frac{c}{c - u}\,, \tag{65}$$

und wenn man dies in $\varrho\, e^{\sigma L}$ einsetzt:

$$l = \frac{\varrho}{1 - \frac{u}{c}} = \varrho\,(1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} + \ldots)\,. \tag{66}$$

Nach der klassischen Theorie wäre die scheinbare Helligkeit des Objekts proportional ϱ^{-2}. Da aber das Signal während der Laufzeit L im Inertialsystem offenbar die Oberfläche einer Sphäre mit dem Radius l erreicht hat, so wird die Intensität des im Zeitpunkt $t_0 + L$ empfangenen Signals umgekehrt proportional der Oberfläche dieser Sphäre, also proportional l^{-2} anzunehmen sein. Wegen $l > \varrho$ wird die Intensität hiernach bei grossen Werten von ϱ beträchtlich geringer sein, als es die klassische Theorie annimmt. Bei mässigen Entfernungen ist übrigens der Unterschied noch sehr gering. So findet man für $\varrho = 10$ Parsec (etwa *α Ursae minoris*)

$$\frac{u}{c} = 1{,}6 \cdot 10^{-8}\,, \qquad l^{-2} \approx (1 - 3{,}3 \cdot 10^{-8})\,\varrho^{-2}\,.$$

Dieser Unterschied ist unmessbar klein. Für die zurzeit schon gemessene Expansionsgeschwindigkeit 20 000 km $\sec^{-1}$ berechnet sich

$$\frac{u}{c} = 0{,}067\,, \qquad l = 1{,}07\,\varrho\,, \qquad l^{-2} = 0{,}87\,\varrho^{-2}\,,$$

was einem Helligkeitsunterschied von ca 0,15 Grössenklassen entspricht. Bei weiterem Eindringen in die Tiefen des Universums werden die Helligkeitsunterschiede gegen die klassische Annahme schon fühlbarer. Geht man z. B. von den Objekten, deren Expansionsgeschwindigkeit 20 000 km $\sec^{-1}$ beträgt, noch um drei Helligkeitsgrössenklassen weiter, so wird die scheinbare Helligkeit 16 mal geringer, nach der klassischen Theorie ϱ also 4 mal grösser, wonach man geneigt wäre als Expansions-

geschwindigkeit zu erwarten 80 000 km sec^{-1}. Auf Grund der hier entwickelten Theorie wird aber nicht ϱ, sondern l nun 4 mal grösser, ϱ dagegen bloss 3,3 mal grösser, und man wird also nur eine Expansionsgeschwindigkeit von ca. 67 000 km sec^{-1} erreichen. Da es sich hier um eine Differenz von 16% in der spektroskopisch zu messenden Geschwindigkeit handelt, so hat man hierin die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung des Helligkeitsgesetzes. Bei der Diskussion der Resultate einer solchen Prüfung wäre jedoch zu berücksichtigen, dass die Voraussage bloss als eine sehr grobe Annäherung zu gelten hat, weil das zugrunde gelegte σ noch sehr unsicher ist, die Resultate der Rechnung aber fühlbar von dem für σ angenommenen Werte abhängen, da alles von der in (66) eingehenden Grösse $\frac{u}{c}$ d. h $\frac{\sigma\varrho}{c}$ stark beeinflusst wird. Jedenfalls ist aber mit einiger Sicherheit zu erwarten, dass wenn die Resultate der ferneren Beobachtungen für grosse Tiefen vom Standpunkt der klassischen Theorie bearbeitet werden, eine Verlangsamung der Expansion in Erscheinung treten muss. Wenn das tatsächlich der Fall sein sollte, wird die hier entwickelte Theorie, als „bequemere" im Poincaré'schen Sinne, den Vorzug verdienen.

Aus (65) folgt für die Laufzeit L des Fernsignals:

$$L = -\tau \log\left(1 - \frac{\sigma\varrho}{c}\right) = \frac{\varrho}{c}\left(1 + \frac{u}{2c} + \frac{u^2}{3c^2} + \ldots\right) . \qquad (67)$$

Diese Laufzeit wird demnach ins unendliche wachsen, wenn das leuchtende Objekt innerhalb der Sichtsphäre sich der Peripherie dieser Sichtsphäre beliebig nähert. Der fixierte Beobachter wird daher zu jeder Zeit jedes beliebige leuchtende Objekt theoretisch noch „sehen" können, den Austritt aus der Sichtsphäre, der doch, wie im vorigen Paragraphen dargelegt, bei konstanter Eigengeschwindigkeit nach endlicher Zeit stattfinden muss, nie „beobachten" können. Bei all dem ist aber noch in Betracht zu ziehen, dass die scheinbare Helligkeit des Objekts bei $\varrho \to \tau c$ dem Grenzwert 0 zustreben wird, wie aus (66) zu folgern ist, weil dann $l \to \infty$. Dieser Umstand dürfte u. a. eine zwanglose Erklärung der Dunkelheit des Himmelsgewölbes bieten, ohne dass man einer zusätzlichen hypothetischen Extinktion des Lichtes im Weltraum benötigte: sollte sogar die ganze Innenfläche $4\pi\varrho^2$ einer Sphäre vom Radius ϱ bestän-

dig mit gleicher Intensität J leuchten, so würde bei $\varrho \to \tau c$ dennoch die Gesamtintensität des empfangenen Lichtes unbegrenzt abnehmen. In einem Raumwinkelelement $d\psi$ wird nämlich der im Mittelpunkt der Sphäre gedachte fixierte Beobachter die scheinbare Helligkeit

$$J \cdot \frac{\varrho^2}{l^2} d\psi = J \cdot (1 - \frac{u}{c})^2 \, d\psi$$

konstatieren; bei $\varrho \to \tau c$ nähert sich dies offenbar dem Wert 0. Eine noch so hell leuchtende Innenfläche vom Radius τc erzeugt im Mittelpunkt überhaupt keine Lichteindrücke.

Für Objekte auf der Sichtsphäre wird die Expansionsgeschwindigkeit $u = \sigma \tau c = c$. Dieser Grenzwert wird aber im Spektroskop schon deshalb nicht zu beobachten sein, weil die Helligkeit dann 0 ist. Wir wollen in diesem Zusammenhang gleich die korrigierte Formel für den Doppler-Effekt angeben, obgleich wir damit etwas vorgreifen, weil an einer Stelle der Ableitung ein Resultat aus § 10 benutzt wird.

Ist L die Laufzeit, so wird ein im Moment t emittiertes Fernsignal im Moment $t + L = T$ empfangen. Die Derivierte

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{dL}{dt}$$

wird die „Zeitvergrösserung" darstellen: eine nach Ansicht des empfangenden Beobachters dt sec andauernde Zeitspanne am Sender wird sich im Empfänger während der Zeitspanne dT sec abwickeln. Gehört hierbei das sendende Objekt zum Inertialsystem des Beobachters, so wird dt auch nach Ansicht dieses Objekts das Emissionsintervall bedeuten; besitzt aber das Objekt eine Eigengeschwindigkeit v, so ist das Zeitmass des Objekts von dem des Inertialsystems verschieden, u. zw. wird, wie im § 10 Formel (87) angegeben, wenn t' die Zeit im „bewegten" Objekt bedeutet,

$$dt = dt' \cdot \operatorname{ch} \omega \, , \qquad v = c \operatorname{th} \omega \, ,$$

für $v = 0$ also $dt = dt'$. Die Zeitvergrösserung beim Empfang im Vergleich zum Emissionsintervall, letzteres gemessen im Zeitmass des Objekts, wird:

$$\frac{dT}{dt'} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = (1 + \frac{dL}{dt}) \operatorname{ch} \omega \, . \tag{68}$$

Ganz abgesehen von anderen Erscheinungen, wird sich nun diese Zeitvergrösserung $\frac{dT}{dt'}$ auch in einem Unterschied zwischen der nach Ansicht des Objekts ausgesandten Frequenz ν' und der nach Ansicht des fixierten Beobachters empfangenen Frequenz ν äussern. Eine einfache Überlegung zeigt, dass

$$\frac{dT}{dt'} = \frac{\nu'}{\nu} \tag{69}$$

sein muss. Aus (65) findet man durch Differentiation nach t:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{c-u} \cdot \frac{d\varrho}{dt} .$$

Führt man die euklidischen Koordinaten s_μ des Objekts ein und versteht unter a_μ die Richtungskosinus der Distanz ϱ, so wird $\varrho a_\mu = s_\mu$ und $\varrho^2 = s_\mu s_\mu$. Durch Differentiation nach t folgt hiernach mit Hilfe von (50):

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{s_\mu \dot{s}_\mu}{\varrho} \\ &= a_\mu \dot{s}_\mu \\ &= a_\mu (v_\mu + \sigma s_\mu) \\ &= a_\mu v_\mu + \sigma\varrho \\ &= a_\mu v_\mu + u . \end{aligned}$$

Fasst man alles dies zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \left(1 + \frac{dL}{dt}\right) \operatorname{ch} \omega \\ &= \left[1 + \frac{1}{c-u}(a_\mu v_\mu + u)\right] \cdot \operatorname{ch} \omega \\ &= \frac{a_\mu v_\mu + c}{c-u} \operatorname{ch} \omega . \end{aligned}$$

Bedeutet Θ den Winkel zwischen v und ϱ, so wird

$$a_\mu v_\mu = v \cos \Theta ,$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \frac{c + v \cos \Theta}{c-u} \operatorname{ch} \omega \\ &= \frac{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta}{1 - \frac{u}{c}} , \end{aligned}$$

oder, in anderer Gestalt:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \Theta}{\left(1 - \frac{u}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \tag{70}$$

Diese Formel geht für $\sigma = 0$, also $u = 0$, in die Einstein'sche Form des Dopplerprinzips über [8]). Für $v = 0$ ergibt sich aus (70) für die dann allein übrigbleibende Expansionsgeschwindigkeit u die klassische Form des Dopplerprinzips.

Beschränkt man sich auf Glieder erster Ordnung und führt statt der Frequenzen die „Wellenlängen" λ und λ' ein, so erhält man aus (70) die Näherungsformel:

$$\lambda - \lambda' = \Delta\lambda \approx \frac{\lambda' (u + v \cos \Theta)}{c} = \frac{\lambda' \dot{\varrho}}{c} ,$$

d. h.

$$\frac{d\varrho}{dt} \approx \frac{c}{\lambda'} \cdot \Delta\lambda . \tag{71}$$

Die Vernachlässigung des Faktors $\operatorname{ch} \omega$ dürfte praktisch von geringer Bedeutung sein, weil gewichtige Gründe dafür sprechen, dass v im allgemeinen klein ist. Wohl aber wird der Fehler der Näherungsformel gross, sobald u gross ist. Desgleichen würde ein merklicher Fehler entstehen, wenn man nach der Einstein'schen Formel rechnete und dabei $\operatorname{ch} \omega$ aus $\frac{d\varrho}{dt}$ statt aus v bestimmte. Ein Beispiel soll dies erläutern:

Für $\varrho = 18{,}75 \cdot 10^{25}$ cm wird $u = 3 \cdot 10^9$ cm sec^{-1}; es sei noch $v = 3 \cdot 10^8$ cm sec^{-1}, $\Theta = 0$. Für die Spektrallinie C ($\lambda' = 6562{,}8$ Å.E.) findet man dann nach der exakten Formel (70) $\lambda = 7365{,}3$, also eine Rotverschiebung um 802,5 Å.E. Dabei ist $\dot{\varrho} = 33\,000$ km sec^{-1}. Nehmen wir nun an, eine Beobachtung ergebe für die C-Linie $\Delta\lambda = 802{,}5$, so würde man nach der Näherungsformel (71) berechnen:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6562{,}8 \cdot 10^{-8}} \cdot 802{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ cm sec}^{-1} = 36700 \text{ km sec}^{-1} ,$$

also unter den gegebenen Bedingungen einen um 11% zu hohen Wert finden. Die genaue klassische Formel würde auf Grund der genannten Beobachtung ergeben:

[8]) Im Enzyklopädieartikel W. Pauli jr. V 19, Formel (15) steht α für $\pi - \Theta$ und β für $\frac{v}{c}$ unserer Bezeichnung.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{c}{\lambda}\Delta\lambda = \frac{3\cdot 10^{10}}{7365{,}3\cdot 10^{-8}}\,802{,}5\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm\ sec^{-1}} = 32700\ \mathrm{km\ sec^{-1}},$$

also bloss um 0,9% zu wenig. Die Einstein'sche Formel würde ergeben, wenn man annimmt, dass die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit gegenüber der Radialkomponente vernachlässigt werden kann, wie es ja in unserem Beispiel streng der Fall ist,

$$\frac{d\varrho}{dt} = c\,\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda^2+\lambda'^2}\Delta\lambda = 3\cdot 10^{10}\,\frac{13928}{97318\cdot 10^3}\,802{,}5\ \mathrm{cm\ sec^{-1}} =$$
$$= 34460\ \mathrm{km\ sec^{-1}},$$

also um 4,5% zu viel.

Bildlich gesprochen, dominiert in der exakten Formel (70) die klassische Komponente gegenüber der relativistischen.

Sind ϱ und σ mit hinreichender Schärfe bekannt, so lässt sich nach (70) aus der Verschiebung der Spektrallinien die Radialkomponente der Eigengeschwindigkeit bei kleinen v, also $\mathrm{ch}\,\omega = 1$, berechnen.

Nähert sich das Objekt der Sichtsphäre, strebt also u gegen c, so wächst die Zeitvergrösserung unbegrenzt. Ereignisse auf nahe der Sichtsphäre befindlichen Himmelskörpern werden vom fixierten Beobachter also gewissermassen unter der Zeitlupe gesehen.

Der Ort, wo das Objekt sich befand, als es das vom Beobachter im Moment T empfangene Signal aussandte, bildet den „sichtbaren Ort" dieses Objekts im Zeitpunkt T, wobei allerdings noch die durch die Eigengeschwindigkeit bedingte Aberration zu berücksichtigen wäre; die Entfernung ϱ im Moment der Emission bildet entsprechend die „sichtbare Distanz" für die Epoche T. Die sichtbaren Orte sämtlicher in Translation begriffener Objekte werden sich mit wachsendem T gegen die Sichtsphäre häufen, denn letztere enthält sämtlich Grenzlagen der sichtbaren Orte für $T \to \infty$. Beachtet man, dass die Zeit sich auch negativ ins Unendliche erstreckt und dass an der Sichtsphäre lokalisierte Objekte einen von Null verschiedenen scheinbaren Durchmesser haben, weil der Radius dieser Sichtsphäre endlich ist, so wird es sehr wahrscheinlich, dass die Sichtsphäre zu jeder Zeit von Objekten völlig überdeckt ist, auch dann, wenn die Anzahl der Objekte überhaupt bloss endlich ist. Der fixierte Beob-

achter wäre demnach jederzeit durch Objekte, deren sichtbarer Ort nahe der Sichtsphäre liegt, vom übrigen Weltraum gewissermassen abgeschirmt.

§ 9. **Weltlinien der translatorischen Bewegung.** Jeder Bahn im $\mathbf{E}_3$ entspricht eine „Weltlinie" im $\mathbf{L}_4$. Es sollen nun die Weltlinien für den Fall translatorischer Bewegung bestimmt werden.

Berechnet man für eine Translation (59) mit Hilfe von (49) die reduzierte Bahn, so folgt:

$$\bar{s}_\nu - (S_\nu + \tau v_\nu) = -\tau v_\nu \, e^{-\sigma t} \; ; \tag{72}$$

mithin ist der Quotient

$$\frac{\bar{s}_\nu - (S_\nu + \tau v_\nu)}{v_\nu}$$

unabhängig vom Index ν. Dies zeigt, dass die reduzierte Bahn im $\mathbf{E}_3$ geradlinig, u. zw. parallel dem euklidischen Vektor v ist. Nun ist aber vom $\mathbf{L}_4$ aus beurteilt diese reduzierte Bahn ein Grenzkreis, u. zw. der Ort der Projektionen des tatsächlichen Ortes des bewegten Massenpunktes aus M auf (39); der tatsächliche Ort im $\mathbf{L}_4$ liegt dann jedenfalls in der Ebene dieses Grenzkreises. Damit ist erwiesen, dass im Falle einer Translation die Weltlinie jedenfalls eine ebene Kurve darstellt.

Die laufenden Koordinaten x_ν, x_4 eines Punktes (x) dieser Weltlinie werden erhalten, wenn man in der Parameterdarstellung (40) $\bar{s}_\nu$ für s_ν und $-\sigma t$ für λ einsetzt, d. h. es wird für die gesuchte Weltlinie:

$$\begin{aligned} x_\nu &= \frac{2\, c^2 \bar{s}_\nu}{c^2 (1 + e^{-2\sigma t}) + \bar{s}_\nu \, \bar{s}_\nu} \, , \\ c - x_4 &= \frac{2\, c^3}{c^2 (1 + e^{-2\sigma t}) + \bar{s}_\nu \, \bar{s}_\nu} \, . \end{aligned} \tag{73}$$

Führt man hier $\bar{s}_\nu$ aus (72) ein, so erhält man die Koordinaten x_ν, x_4 der Weltlinie als Funktionen des Parameters t.

Aus (73) folgt durch Division:

$$\frac{c\, x_\nu}{c - x_4} = \bar{s}_\nu \, , \tag{74}$$

also:

$$\bar{s}_\nu \, \bar{s}_\nu = \frac{c\, x_\nu \, x_\nu}{(c - x_4)^2} \, . \tag{75}$$

Verwendet man noch die Richtungskosinus a_ν des Vektors v, setzt also

$$v_\nu = v\, a_\nu \,, \tag{76}$$

so wird

$$\frac{c\, x_\nu\, a_\nu}{c - x_4} = \bar{s}_\nu\, a_\nu = S_\nu\, a_\nu + \tau\, v\, a_\nu\, a_\nu\, (1 - e^{-\sigma t})$$
$$= S_\nu\, a_\nu + \tau\, v\, (1 - e^{-\sigma t}) \,.$$

Definiert man ferner eine Grösse λ mittels

$$S_\nu\, a_\nu = \tau\, v\, (e^\lambda - 1) \,,$$

so folgt:

$$\frac{c\, x_\nu\, a_\nu}{c - x_4} = \tau\, v\, (e^\lambda - e^{-\sigma t}) \,,$$

und wenn man diese Gleichung nach $e^{-\sigma t}$ auflöst und einen zwischen 0 und π gelegenen Winkel χ durch

$$-\tau\, v = c \tan \chi \tag{77}$$

einführt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^\lambda (c - x_4) + x_\nu\, a_\nu \cot \chi}{c - x_4} \,.$$

Setzt man dies nebst (75) in (73) ein, so resultiert nach einigen Vereinfachungen für den Punkt (x) der Weltlinie:

$$F_{xx} - \left[e^\lambda (c - x_4) + x_\nu\, a_\nu \cot \chi\right]^2 = 0 \,. \tag{78}$$

Die Weltlinie bildet einen ebenen u. zw. durch M gehenden Schnitt des Isogonalraumes (78), also jedenfalls eine Isogone der Zeitrichtungen. Der ideelle Mittelpunkt (p) des Isogonalraumes (78) hat die Koordinaten

$$p_\nu = -e^{-\lambda}\, c\, a_\nu \cot \chi \,, \qquad p_4 = c \,.$$

Aus (74) und (72) folgert man:

$$\frac{c\, x_\nu}{c - x_4} = \bar{s}_\nu = S_\nu + \tau\, v_\nu - \tau\, v\, a_\nu\, e^{-\sigma t}$$
$$= C_\nu - \tau\, v\, a_\nu\, e^{-\sigma t} \,,$$

worin C_ν eine gewisse konstante Grösse hat. Es wird daher

$$\frac{c\, x_\nu - C_\nu\, (c - x_4)}{a_\nu\, (c - x_4)} = -\tau\, v\, e^{-\sigma t} \,,$$

also

$$\frac{c\, x_1 - C_1\, (c - x_4)}{a_1} = \frac{c\, x_2 - C_2\, (c - x_4)}{a_2} = \frac{c\, x_3 - C_3\, (c - x_4)}{a_3} \,.$$

Die hierdurch bestimmte Schnittebene enthält, wie man sich durch direktes Einsetzen der Koordinaten überzeugt, die Punkte M und (p) und liefert somit laut § 3 im Schnitt mit (78) eine Hauptisogone. Damit ist erkannt, dass die gesuchte Weltlinie eine Isogone der Zeitrichtungen von der nach (77) durch v bestimmten Neigung χ ist.

Lässt man die Ebene der Isogone in die 4 & 1-Ebene fallen, so ergibt sich als Gleichung der Kurve:

$$F_{xx} - \left[e^{\lambda}(c - x_4) + x_1 \cot\chi\right]^2 = 0 \ . \tag{79}$$

Diese Kurve geht durch M und trifft die 4-Achse ausserdem noch in der Entfernung λc vom Ursprung. In der Fig. 2 ist

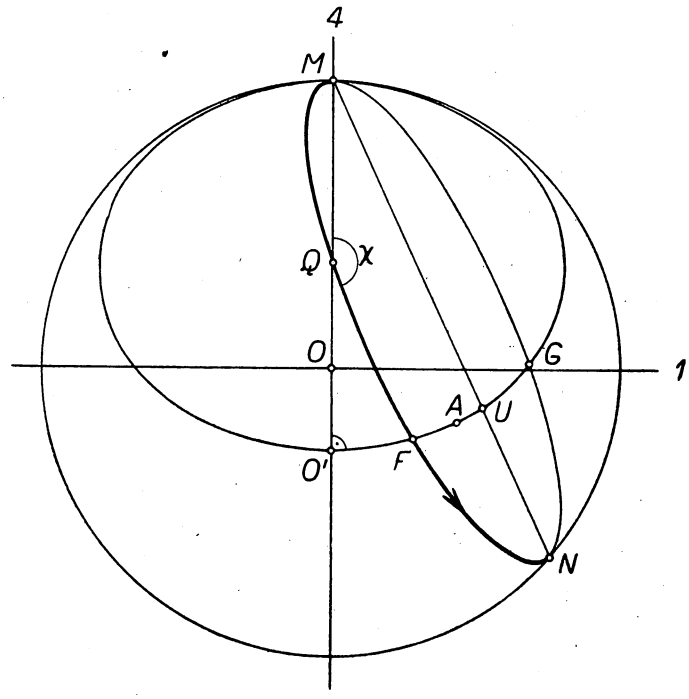

Fig. 2.

die 4 & 1-Ebene in der Klein'schen Interpretation[9]) dargestellt; der Kreis interpretiert das absolute Gebilde, $MQFNG$ die Isogone (79), $MO'FAUG$ einen Schnitt des $\mathbf{E}_3$ für ein bestimmtes t mit der 4 & 1-Ebene, also einen Grenzkreis. Die Isogone berührt das absolute Gebilde ausser in M noch im Punkte N, dessen Koordinaten lauten:

$$x_1 = \frac{-2\,c\,e^{\lambda}\tan\chi}{e^{2\lambda}\tan^2\chi + 1}\ , \qquad x_4 = \frac{c\,(e^{2\lambda}\tan^2\chi - 1)}{e^{2\lambda}\tan^2\chi + 1}\ .$$

[9]) Die Klein'sche Interpretation entsteht, wenn man die hyperbolischen Koordinaten x_1, x_4 als euklidisch-cartesische auffasst.

Sie schneidet den Grenzkreis in zwei Punkten F und G, welche durch die u. f. Punkte M und N getrennt sind, und berührt denselben Grenzkreis in M. Es wird N für $t = +\infty$, M für $t = -\infty$ erreicht. Den Gleichungen (73) entspricht nur der eine Bogen der mittels (79) dargestellten ganzen Isogone; in der Figur ist dieser eine Bogen durch dickere Linienführung gekennzeichnet. Der in der Zeitrichtung MN im $\mathbf{L}_4$ „fallende" Punkt U des fixierten Inertialsystems wird von der Isogone bei unbeschränkt wachsendem t gerade nicht mehr getroffen, wohl aber jeder näher zu F liegende Punkt A dieses Inertialsystems. Nach § 7 wird daher der Grenzkreisbogen FU die Länge τv haben, unabhängig von t. Von U aus beurteilt ist F der Fluchtpunkt und die Bewegung längs der Isogone eine singuläre.

Zur Berechnung des Bogenelements dJ der Isogone bedarf man nach (15) der Grössen F_{xx}, $F_{x,dx}$ und $F_{dx,dx}$. Wir geben kurz die Resultate an. Es wird nach (73) und (78), unter Beachtung der übrigen Relationen:

$$F_{xx} = \frac{c^2 \cos^4 \chi}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^2}$$

$$F_{x,dx} = \frac{-\sigma c^2 \operatorname{sh} \sigma t \cos^4 \chi}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^3} dt$$

$$F_{dx,dx} = \sigma^2 c^2 \cos^2 \chi \frac{(1 - \sin^2 \chi \operatorname{ch} \sigma t)^2 + \sin^2 \chi \cos^2 \chi \operatorname{sh}^2 \sigma t}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^4} dt^2,$$

woraus sich bei passender Vorzeichenwahl ergibt:

$$dJ = -\frac{\sigma c}{\cos \chi} dt = \frac{-\gamma\, dt}{\cos \chi} = \frac{dq}{\cos \chi}, \tag{80}$$

wenn q die Bedeutung (45) hat. Zählt man die Bogenlänge J vom Moment $t = 0$ an, so wird folglich

$$J = \frac{-\gamma t}{\cos \chi} = \frac{q}{\cos \chi}. \tag{81}$$

Die Bogenlänge der beschriebenen Weltlinie ist also bei translatorischer Bewegung proportional der Zeit; der Proportionalitätsfaktor, also sozusagen die Geschwindigkeit, mit der die Isogone im $\mathbf{L}_4$ beschrieben wird, ist $\frac{-\gamma}{\cos \chi}$. Im krummlinigen Dreieck $QO'F$ der Fig. 2 ist also

$$\frac{QO'}{QF} = -\cos \chi = \cos(\pi - \chi).$$

Hierbei bedeutet die geradlinige Strecke QO' die mittels eines orthogonalen Grenzkreises erzeugte Projektion des Bogens QF auf die Zeitrichtung. Nennt man eine mittels orthogonaler Grenzkreise erzeugte Projektion eine Weierstrass'sche, so hat man den Satz:

> Die Weierstrass'schen Projektionen der Bogenstücke einer Isogone auf eine beliebige Zeitrichtung sind proportional den Längen der Bogenstücke; der Proportionalitätsfaktor ist der Kosinus des Neigungswinkels.

Nach (80) und (77) wird

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2 c^2}{\cos^2 \chi} = \sigma^2 c^2 (1 + \tan^2 \chi) = v^2 + \gamma^2 \ . \tag{82}$$

Assoziiert man auch der Geschwindigkeit $\frac{dJ}{dt}$ nach dem Prinzip (56) einen in der Tangente gerichteten hyperbolischen Vektor von der Länge H, setzt also

$$\frac{dJ}{dt} = c \operatorname{th} \frac{H}{c} \ ,$$

so gelten für die Projektionen H_4 und H_1 dieses Vektors H auf die Zeitrichtung und auf den Berührungsraum $\mathbf{L}_3$ des $\mathbf{E}_3$ die Beziehungen:

$$c \operatorname{th} \frac{H_4}{c} = - c \operatorname{th} \frac{H}{c} \cos \chi = \gamma \ ,$$

$$c \operatorname{th} \frac{H_1}{c} = c \operatorname{th} \frac{H}{c} \cos (\chi - \frac{\pi}{2}) = - \sigma c \tan \chi = v \ .$$

Der Vektor H_4 würde demnach der Fallgeschwindigkeit γ des $\mathbf{E}_3$, der Vektor H_1 der Eigengeschwindigkeit v des Massenpunktes assoziiert sein. Dies gilt für jeden Punkt der Isogone, unabhängig von t. Es liegt nahe anzunehmen, dass nur die Komponente v eine Energiedifferenz im $\mathbf{E}_3$ bedeutet, die Expansionsgeschwindigkeit dagegen, die bloss einer Ortsdifferenz entspricht und nicht von Ort zu Ort übertragen werden kann, für den Energiebegriff im $\mathbf{E}_3$ ohne Belang ist. Auf eine nähere Behandlung des Energieproblems soll in dieser Abhandlung verzichtet werden.

Der Vektor H ist die hyperbolische Summe des Vektors H_1 und eines Vektors H'_4 (Fig. 3). Für H'_4 berechnet sich nach Formeln der hyperbolischen Geometrie:

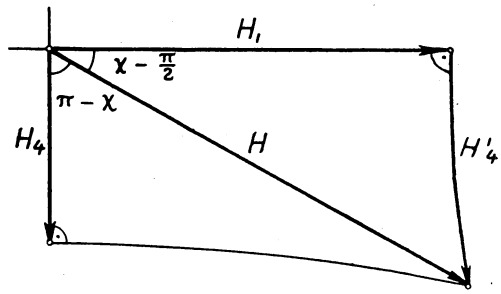

Fig. 3,

$$c \operatorname{th} \frac{H'_4}{c} = c \operatorname{sh} \frac{H_1}{c} \tan\left(\chi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= - c \operatorname{th} \frac{H_1}{c} \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \cot \chi$$

$$= - v \cot \chi \operatorname{ch} \frac{H_1}{c}$$

$$= \sigma c \operatorname{ch} \frac{H_1}{c}$$

$$= \gamma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \cdot$$

Bezeichnet man $c \operatorname{th} \frac{H'_4}{c}$ in Analogie mit $c \operatorname{th} \frac{H_4}{c}$ mittels γ', so gilt also:

$$\gamma' = \gamma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \cdot$$

Bildet man aus γ' und c die Werte $\frac{\gamma'}{c} = \sigma'$, $\frac{c}{\gamma'} = \tau'$, so wird

$$\sigma' = \sigma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c}, \qquad \tau = \tau' \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \cdot \tag{83}$$

Auf eine Interpretation dieser Formeln (83) kommen wir im nächsten Paragraphen noch kurz zu sprechen.

§ 10. **Transformation auf ein anderes Inertialsystem.** Es werde nun neben dem fixierten noch ein zweites Inertialsystem betrachtet, dessen Eigengeschwindigkeit in bezug auf das erste die Komponenten v_ν besitzt. Wir führen wieder mittels

$$v = c \operatorname{th} \omega, \quad v = \sqrt{v_\nu v_\nu}$$

den Parameter ω zur Kennzeichnung dieser Eigengeschwindigkeit ein. a_ν seien die Richtungskosinus des Vektors v in bezug auf die euklidischen Achsen des ersten Systems. Zur Unterscheidung verwenden wir für die Bezeichnung der Koordinaten s_ν eines Punktes und des Zeitmasses t im zweiten System die Strichelung: s'_ν, t'. Die Anfangsepochen seien so gewählt, dass im Moment der Koinzidenz beider Ursprünge $t = t' = 0$ wird. Die Achsen des zweiten Systems mögen denen des ersten gegenüber nicht gedreht sein, was besagen will, dass die Bahnen der Ursprünge, jeweils vom anderen System beurteilt, dieselben Richtungskosinus, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen sollen. Die Richtungskosinus der Bahn des zweiten Ursprungs sind hierbei, wie man aus (60) für $S_\nu = 0$ erkennt, genau die Richtungskosinus a_ν des Vektors v.

Ein Punkt (s) des ersten Systems wird im Moment t seiner Zeitrechnung mit einem Punkt (s') des zweiten Systems und der Zeitangabe t' nach dessen Zeitrechnung koinzidieren. Gesucht sind die Übergangsformeln von (s), t zu (s'), t'. Diese Formeln müssen folgenden Forderungen genügen:

1) Es muss die Hypothese VIII von der Addition der Eigengeschwindigkeiten gelten.
2) Die Bahnen der Punkte des einen Systems müssen vom anderen aus beurteilt sich im $\mathbf{L}_4$ sämtlich als Isogonen mit ein und derselben durch (77) bestimmten Neigung χ erweisen.
3) Die Konsequenzen müssen unabhängig sein von der Wahl des Ursprungs und der Nullepoche.

Geht vom Ursprung im fixierten System im Nullmoment ein Signal mit der Eigengeschwindigkeit w aus, und erreicht dieses Signal einen Beohachter (s) dieses Systems im Moment t, so wird der mit (s), t koinzidierende Beobachter (s'), t' des zweiten Systems offenbar ebenfalls die Ankunft des Signals konstatieren. Das Signal ist der getroffenen Übereinkunft gemäss auch im zweiten System aus dem Ursprung im Moment 0 ausgegangen, nur ist seine Eigengeschwindigkeit dort eine andere, denn es wird die Beziehung (54) gelten müssen.

Formt man mit Hilfe gewisser Proportionalitätsfaktoren p und p' die gebrochene Transformation (54) in die homogene Gestalt um, so folgt:

$$p w_\mu = p' w'_\mu + p' (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu w'_\nu + p' c a_\mu \operatorname{sh} \omega$$

$$p = p' \frac{1}{c} a_\nu w'_\nu \operatorname{sh} \omega + p' \operatorname{ch} \omega \ .$$

Bedeutet l die mittels (64) definierte Lichtzeit für die hier mit t bezeichnete Laufzeit des Signals, also

$$l = \tau c (e^{\sigma t} - 1) \ ,$$

so berechnet sich s_ν aus (62) als

$$s_\nu = \frac{w_\nu}{c} l \ ,$$

und ebenso wird für das zweite System:

$$s'_\nu = \frac{w'_\nu}{c} l' \ .$$

Führt man demnach $s_\nu c l^{-1}$ und $s'_\nu c l'^{-1}$ statt w_ν und w'_ν in die oben angegebenen homogenen Transformationsformeln ein, so folgt, wenn man noch $\varkappa l$ und $\varkappa' l'$ entsprechend statt p und p' schreibt:

$$\varkappa s_\mu = \varkappa' \left[s'_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu \operatorname{sh} \omega \right]$$

$$\varkappa l = \varkappa' \left[a_\nu s'_\nu \operatorname{sh} \omega + l' \operatorname{ch} \omega \right] \ .$$

Es wird sich später zeigen, dass die Forderungen 2) und 3) erfüllt sind, wenn $\varkappa = \varkappa' = 1$. Die gesuchte Transformation erhält dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} s_\mu &= s'_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu \operatorname{sh} \omega \\ l &= a_\nu s'_\nu \operatorname{sh} \omega + l' \operatorname{ch} \omega \ . \end{aligned} \tag{84}$$

Formal ist (84) mit der Lorentz-Transformation identisch; inhaltlich besteht ein wesentlicher Unterschied, da die Lichtzeit anders definiert ist als dort. Die Grösse τ bedeutet nach (51) eine Anzahl von sec des fixierten Beobachters. Da der sec-Etalon des „bewegten" Beobachters mit demjenigen des fixierten nicht übereinstimmt, wird die Zeitspanne τ in sec des bewegten Beobachters eine andere Masszahl τ' ergeben. Nach Ansicht des fixierten Beobachters wird der bewegte bei der Bestimmung der Lichtzeit l' mit dieser unrichtigen Zahl τ' operieren, also

$$l' = \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1)$$

ansetzen.

Infolge

$$l = \tau c\,(\sigma t + \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \ldots) = c t\,(1 + \frac{\sigma t}{2!} + \frac{\sigma^2 t^2}{3!} + \ldots)$$

$$l' = \tau' c(\sigma' t' + \frac{\sigma'^2 t'^2}{2!} + \ldots) = c t'\,(1 + \frac{\sigma' t'}{2!} + \frac{\sigma'^2 t'^2}{3!} + \ldots)$$

wird in erster Annäherung die Definition der Lichtzeit für beide Systeme mit der Einstein-Minkowski'schen $l = ct$, $l' = ct'$ zusammenfallen. In derselben ersten Annäherung wird also auch (84) mit der Lorentz-Transformation inhaltlich identisch. Die Relativitätstheorie setzte eben $\sigma = \sigma' = 0$. Die empirische Erkenntnis, dass $\sigma > 0$, führt ebenso zwangsläufig zu einer Revision der kinematischen Grundprinzipien, wie die empirische Erkenntnis, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht unendlich gross ist, früher oder später zur Relativitätstheorie führen musste.

Wie sich der Zusammenhang zwischen τ und τ' darstellen muss, wenn der Forderung 3) am Anfang dieses Paragraphen genügt werden soll, zeigen folgende Überlegungen:

Wir legen im Interesse der analytischen Einfachheit den Vektor v in die Richtung der 1-Achse, setzen also $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$. Die Gleichungen (84) werden dann:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1' \operatorname{ch}\omega + \tau' c\,(e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{sh}\omega \\ s_2 &= s_2' \\ s_3 &= s_3' \\ \tau c\,(e^{\sigma t} - 1) &= s_1' \operatorname{sh}\omega + \tau' c\,(e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{ch}\omega\ . \end{aligned} \tag{85}$$

Man fasse nun irgendeinen im gestrichenen System keine Eigengeschwindigkeit besitzenden Beobachter ins Auge. Für diesen wird nach (50)

$$\frac{ds_\nu'}{dt'} = \sigma' s_\nu'\ .$$

Die letzte Gleichung (85) ergibt durch Differentiation bei einem solchen Werte von $\frac{ds_\nu'}{dt'}$:

$$\begin{aligned} c\,e^{\sigma t}\,dt &= (\sigma' s_1' \operatorname{sh}\omega + c\,e^{\sigma' t'} \operatorname{ch}\omega)\,dt' \\ &= \sigma' (s_1' \operatorname{sh}\omega + \tau' c\,e^{\sigma' t'} \operatorname{ch}\omega)\,dt' \\ &= \sigma' \left[\tau c\,(e^{\sigma t} - 1) + \tau' c \operatorname{ch}\omega\right] dt'\ . \end{aligned}$$

Weil aber der Differentialquotient $\frac{dt}{dt'}$ nach 3) unabhängig sein muss von der Wahl der Nullepoche, also von dem Werte t, so ergibt sich hieraus zwangsläufig:

$$-\tau c + \tau' c \operatorname{ch} \omega = 0 ;$$

also:

$$\tau = \tau' \operatorname{ch} \omega , \tag{86}$$

und daher:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\tau}{\tau'} = \operatorname{ch} \omega . \tag{87}$$

Die letzte Formel haben wir schon bei der Diskussion des Doppler-Effekts verwendet. dt' ist das Zeitintervall vom Standpunkt des bewegten Objekts, dt das entsprechende Zeitintervall vom Standpunkt der die Bewegung dieses Objekts nach ihren Koordinaten verfolgenden Beobachter aus dem sich in Ruhe dünkenden System. Operiert man mit koinzidierenden Nullepochen, so wird:

$$t = t' \operatorname{ch} \omega , \quad \sigma t = \frac{t' \operatorname{ch} \omega}{\tau' \operatorname{ch} \omega} = \sigma' t' .$$

Es wird daher auch für die Lichtzeiten l und l' die dem vorigen analoge Beziehung

$$l = l' \operatorname{ch} \omega$$

gelten. Hierin sind die gestrichenen Werte τ', t', l' stets demjenigen System zugeordnet, welches als das „bewegte" gilt.

Die Schlussformel (83) des vorigen Paragraphen ist mit (86) inhaltlich identisch. Es bedeutet dies, vom fixierten System aus gesehen, dass der bewegte Beobachter statt mit der richtigen Fallgeschwindigkeit γ mit einer falschen, durch H_4' repräsentierten Fallgeschwindigkeit γ' operiert. Die Beschuldigung ist wechselseitig, d. h. die Lagen von H_4 und H_4' in der Figur 3 vertauschen sich, wenn man den zweiten Beobachter als feststehend, den ersten als bewegt betrachtet, und das Problem mit den Augen des zweiten ansieht. Transponiert man demnach die Attribute „feststehend" und „bewegt", so wird nicht mehr (86), sondern die entsprechend modifizierte Dilatation

$$\tau' = \tau \operatorname{ch} \omega$$

bestehen. Die Zeitdilatation resp. Lichtzeitdilatation ebenso wie die Längenkontraktion entsteht eben nur dadurch, dass man das eine System als „ruhend", das andere als „bewegt" an-

sieht, genauer gesagt dadurch, dass man die cm- und sec-Etalons des „bewegten“ mit den „richtigen“ cm- und sec-Etalons des „ruhenden“ Beobachters zu vergleichen trachtet. Die Zahl τ' in (86) entsteht, wenn man die Zeitspanne τ des ruhenden Beobachters in scheinbar längeren Sekunden des bewegten Beobachters ausdrückt. In „eigenen“ Sekunden wird der Zahlenwert von τ für alle auf den Ruhezustand orientierten Beobachter laut der Hypothese III stets ein und derselbe sein, eine universelle Konstante, gedeutet als Zahl der dem System eigenen Sekunden, während welcher der Weltraum im $\mathbf{L}_4$ um c dem System eigene cm in der dem System eigenen Zeitrichtung „fällt“.

Es sei beiläufig bemerkt, dass die Begriffe „Zeit“ und „Länge“ nach den Grundvorstellungen der hier entwickelten Theorie auch von der Gravitation mitbeeinflusst werden.

§ 11. **Scheinbare Deformation des Weltraumes.** Der Ort der Punkte, wo t' einen konstanten Wert hat, bildet den scheinbaren Weltraum des bewegten Beobachters vom Standpunkt des fixierten. Die Gleichung dieses scheinbaren Weltraumes im $\mathbf{L}_4$ soll bestimmt werden.

Es sei zunächst bemerkt, dass die zu (84) inverse Transformation sich ergibt, wenn man die Richtungskosinus a_ν mit entgegengesetzten Vorzeichen nimmt:

$$\begin{aligned} s'_\mu &= s_\mu + (\operatorname{ch}\omega - 1)\, a_\mu\, a_\nu\, s_\nu - l\, a_\mu \operatorname{sh}\omega \\ l' &= -\, a_\nu\, s_\nu \operatorname{sh}\omega + l \operatorname{ch}\omega\ . \end{aligned} \tag{88}$$

Man kann dies durch direktes Nachrechnen verifizieren, oder auch aus (6) ablesen, da es sich bei (84) ja formal um eine hyperbolische Bewegung handelt.

Ist nun t', also auch l' eine Konstante, so führen wir zunächst einen Parameter λ mittels $\lambda = -\sigma t_0$ ein, wo t_0 denjenigen Zeitpunkt im fixierten System bedeutet, in welchem dessen Ursprung mit einem Punkt des zweiten Systems in der Lichtzeitepoche l' nach der Zeitrechnung des letzteren koinzidiert. Aus der letzten Relation (88) folgt dann:

$$l' = \tau c\,(e^{-\lambda} - 1) \operatorname{ch}\omega\ .$$

Um nun den scheinbaren Weltraum für diesen konstanten Wert von l' zu finden, hat man die in (40) auftretenden s_ν, s durch die unsrigen hier benutzten s_ν, $s = \sqrt{s_\nu\, s_\nu}$ entsprechenden reduzierten Werte $s_\nu\, e^{-\sigma t}$, $s\, e^{-\sigma t}$, und das dort auftretende λ

durch $-\sigma t$ zu ersetzen. Es wird demnach für die Koordinaten x_β dieses scheinbaren Weltraumes:

$$x_\nu = \frac{2\,c^2\,s_\nu\,e^{-\sigma t}}{c^2(1+e^{-2\sigma t})+s^2 e^{-2\sigma t}}$$
$$c - x_4 = \frac{2\,c^3}{c^2(1+e^{-2\sigma t})+s^2\,e^{-2\sigma t}}\,. \tag{89}$$

Hieraus folgt zunächst durch Division:

$$\frac{c\,x_\nu}{c-x_4} = s_\nu\,e^{-\sigma t}\,, \tag{90}$$

und hiernach:

$$s^2\,e^{-2\sigma t} = s_\nu\,s_\nu\,e^{-2\sigma t} = \frac{c^2\,x_\nu\,x_\nu}{(c-x_4)^2}\,. \tag{91}$$

Es bleibt nun noch $e^{-\sigma t}$ durch die x_β auszudrücken. Die letzte Relation (88) ergibt, wenn man den konstanten Wert von l', wie oben angegeben, durch λ ausdrückt:

$$e^{-\sigma t}\,\tau\,c\,(e^{-\lambda}-1)\,\mathrm{ch}\,\omega = -\,s_\nu\,e^{-\sigma t}\,a_\nu\,\mathrm{sh}\,\omega + \tau\,c\,(1-e^{-\sigma t})\,\mathrm{ch}\,\omega\,,$$

also:

$$e^{-\sigma t}\,\tau\,c\,(e^{-\lambda}-1)\,\mathrm{ch}\,\omega = \frac{-\,c\,x_\nu\,a_\nu}{c-x_4}\,\mathrm{sh}\,\omega + \tau\,c\,(1-e^{-\sigma t})\,\mathrm{ch}\,\omega\,.$$

Löst man diese Gleichung nach $e^{-\sigma t}$ auf, so folgt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^{\lambda}\,(c-x_4-x_\nu\,a_\nu\,\sigma\,\mathrm{th}\,\omega)}{c-x_4}\,.$$

Wird hier noch eine zwischen 0 und π gelegene Winkelgrösse ψ mittels

$$-\sigma\,\mathrm{th}\,\omega = -\frac{v}{\tau\,c} = \cot\psi \tag{92}$$

eingeführt, so resultiert aus (89) nach einigen Vereinfachungen:

$$F_{xx} - e^{2\lambda}\,(c-x_4+x_\nu\,a_\nu\,\cot\psi)^2 = 0 \tag{93}$$

als die gesuchte Gleichung des scheinbaren Weltraumes.

Wie ein Vergleich mit (37) lehrt, ergibt dies bei veränderlichem λ, also veränderlichem l', eine Schar konzentrischer Isogonalräume des Bündels M der Zeitrichtungen. Der Mittelpunkt (p) von (93) besitzt die Koordinaten:

$$p_\nu = -\,c\,a_\nu\,\cot\psi = \sigma\,v\,a_\nu = \sigma\,v_\nu\,,$$
$$p_4 = c\,.$$

Da laut § 3 das Gebilde (93) als uneigentliche dreidimensionale Sphäre mit dem ideellen Mittelpunkt (p) aufgefasst werden kann, so gilt demnach der Satz:

> Nach Ansicht des ruhenden Beobachters benutzt der bewegte, statt der konzentrischen Grenzsphären, als sukzessive Welträume konzentrische uneigentliche Sphären mit ideellem Mittelpunkt. Die 3 ersten Koordinaten dieses Mittelpunktes sind die mit σ multiplizierten Komponenten der Eigengeschwindigkeit, die vierte Koordinate ist, wie beim ruhenden Beobachter, gleich c.

Es sei beiläufig bemerkt, dass die Geometrie auf dem Gebilde (93) nicht mehr euklidisch, sondern hyperbolisch ist[10]. In der speziellen Relativitätstheorie, die ja der hier entwickelten in den Einzelheiten analog ist, bedeutet der Übergang zum „bewegten" Weltraum bloss eine affine Transformation des euklidischen Raumes.

Wir schulden noch den Beweis, dass für die Transformation (84) die Forderung 2) des § 10 tatsächlich erfüllt ist.

Sind S'_ν die Koordinaten des zum bewegten Inertialsystem gehörigen Massenpunktes im Moment $t' = 0$, so wird für eben diesen Massenpunkt beständig

$$s'_\nu = S'_\nu \, e^{\sigma' t'}$$

gelten müssen. Wir führen nun analog dem vorigen eine Hilfsgrösse λ mittels

$$a_\nu \, S'_\nu = \frac{\tau c \, (e^\lambda - 1) \operatorname{sh} \omega}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega} = \frac{\tau v \, (e^\lambda - 1)}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch} \omega} \tag{94}$$

ein. Die letzte Gleichung (84) ergibt unter Berücksichtigung von (86):

$$\begin{aligned} \tau c \, e^{\sigma t} &= S'_\nu \, a_\nu \, e^{\sigma' t'} \operatorname{sh} \omega + \tau c \, e^{\sigma' t'} \\ &= (S'_\nu \, a_\nu \operatorname{sh} \omega + \tau c) \, e^{\sigma' t'} \, . \end{aligned}$$

---

[10]) Vgl. etwa F. Klein, Vorles. üb. nicht-euklidische Geometrie, Neubearbeitung 1928, Kap. VII § 7.

Aus (94) folgt aber:

$$S'_\nu a_\nu \operatorname{sh} \omega + \tau c = \frac{\tau c}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega} ;$$

mithin wird

$$\operatorname{ch}^2 \omega (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) = e^{\sigma' t'} \cdot e^{-\sigma t} . \tag{95}$$

Die hyperbolischen Koordinaten des beobachteten Massenpunktes müssen den Gleichungen (89), mithin auch (90) und (91) genügen. Aus (90) folgt:

$$\frac{c x_\nu a_\nu}{c - x_4} = s_\nu a_\nu e^{-\sigma t} . \tag{96}$$

Andererseits ist nach (84), wenn man in Betracht zieht, dass es sich um euklidische Richtungskosinus handelt:

$$\begin{aligned} s_\mu a_\mu &= s'_\mu a_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu a_\mu \operatorname{sh} \omega \\ &= s'_\mu a_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\nu s'_\nu + l' \operatorname{sh} \omega \\ &= s'_\nu a_\nu \operatorname{ch} \omega + l' \operatorname{sh} \omega \\ &= S'_\nu a_\nu e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega + l' \operatorname{sh} \omega . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} l' \operatorname{sh} \omega &= \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{sh} \omega \\ &= \tau c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{th} \omega \\ &= \tau v (e^{\sigma' t'} - 1) . \end{aligned}$$

Man hat daher aus (94), (95), (96):

$$\begin{aligned} \frac{c x_\nu a_\nu}{c - x_4} &= \left[S'_\nu a_\nu e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega + \tau v e^{\sigma' t'} - \tau v \right] e^{-\sigma t} \\ &= \frac{\tau v (e^\lambda - 1)}{1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega} (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega + (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \tau v \operatorname{ch}^2 \omega - \tau v e^{-\sigma t} \\ &= \tau v e^\lambda - \tau v e^{-\sigma t} . \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich, wenn man mit Hilfe von (77) wieder die Grösse χ einführt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^{\lambda}(c - x_4) + x_\nu\, a_\nu \cot\chi}{c - x_4},$$

und die (x) genügen nach (89) der Gleichung

$$F_{xx} - \left[e^{\lambda}(c - x_4) + x_\nu\, a_\nu \cot\chi\right]^2 = 0\,. \tag{97}$$

Der beobachtete Massenpunkt befindet sich also nach Ansicht des fixierten Beobachters jederzeit im Isogonalraum (97) von der Neigung χ. Bei einer Verlegung des Ursprungs bleibt χ ungeändert, ebenso bei einer Verlegung der Nullepoche.

Nun gilt aber für einen beliebigen Punkt (x) der Bahn des Massenpunktes im $\mathbf{L}_4$ sicher (90), also:

$$\begin{aligned}\frac{c\,x_\mu}{c - x_4} &= s_\mu\, e^{-\sigma t}\\ &= \left[S'_\mu\, e^{\sigma' t'} + (\operatorname{ch}\omega - 1)\, a_\mu\, a_\nu\, S'_\nu\, e^{\sigma' t'} + l'\, a_\mu \operatorname{sh}\omega\right] e^{-\sigma t}\\ &= \left[S'_\mu + (\operatorname{ch}\omega - 1)\, a_\mu\, a_\nu\, S'_\nu + \tau v\, a_\mu\right] e^{\sigma' t'} \cdot e^{-\sigma t} - \tau v\, a_\mu\, e^{-\sigma t}\\ &= C_\mu - \tau v\, a_\mu\, e^{-\sigma t}\,,\end{aligned}$$

worin C_μ von t unabhängig ist. Hieraus folgt wie im § 9, dass die Bahn eine Hauptisogone wird, also die Neigung χ hat. Damit ist die Gültigkeit der Forderung 2) des § 10 erwiesen.

Die in (93) eingehende Winkelgrösse ψ ist mit χ durch die Relation

$$\tan\psi \cdot \tan\chi = \tau^2 \tag{98}$$

verknüpft.

Es sei bemerkt, dass die Bestimmung des scheinbaren Weltraumes und der Weltlinien analytisch einfacher vor sich geht, wenn man dem Achsensystem eine spezielle Lage gibt. Es wäre dann aber noch besonders zu beweisen, dass die erhaltenen Ergebnisse von der gewählten Achsenlage unabhängig sind.

Zusammenfassung der wesentlichsten Resultate.

1. Die spezielle Relativitätstheorie ist in der dargestellten „expansionistischen" Kinematik unter der Annahme, dass der Expansionskoeffizient σ gleich Null wird, als Sonderfall enthalten.

2. Bei $\sigma > 0$ hat man zwischen Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit zu unterscheiden.

3. Bei konstanter Eigengeschwindigkeit v berechnet sich die überbrückte Distanz D aus

$$D = \frac{v}{c} l ,$$

wenn l das Lichtzeitintervall für die Zeit t,

$$l = \sigma^{-1} c \, (e^{\sigma t} - 1) ,$$

und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die so definierte Lichtzeit ist eine den Expansionskoeffizienten σ berücksichtigende Verallgemeinerung der Einstein'schen.

4. Ein Inertialsystem ist zweckmässig definiert als System, in dem sämtliche dazu gehörigen Massenpunkte die Eigengeschwindigkeit 0, und sämtliche übrigen Massenpunkte eine Eigengeschwindigkeit, die kleiner ist als c, besitzen.

5. Die Lorentz-Transformation gilt allgemein, wenn man statt der Einstein'schen die verallgemeinerte Lichtzeit einführt.

6. Der Übergang zum bewegten Inertialsystem ist gleichbedeutend einer Transformation der geradlinigen Zeitrichtungen in ein Isogonenbündel dieser Zeitrichtungen; die Schar aufeinanderfolgender Welträume transformiert sich aus einer Schar konzentrischer Lobatschewski'scher Grenzsphären in eine Schar uneigentlicher konzentrischer Sphären mit ideellem Mittelpunkt.

7. Die scheinbare Helligkeit der Himmelskörper nimmt stärker ab, als mit dem Quadrat der Entfernung. Aus der Entfernung $\sigma^{-1} c$ emittiertes Licht würde eine unendlich lange Laufzeit besitzen und die Helligkeit Null ergeben; das Himmelsgewölbe muss daher im allgemeinen dunkel erscheinen.

8. Prinzipiell sind nur Objekte innerhalb der Sichtsphäre vom Radius $\sigma^{-1} c$ um den Beobachter herum beobachtbar. Es hat sich aber jedes Objekt einmal innerhalb dieser Sichtsphäre befunden und verbleibt theoretisch beständig sichtbar, weil die Laufzeit des Lichtes ins unendliche wächst, wenn die Entfernung sich dem Grenzwert $\sigma^{-1} c$ unbeschränkt nähert.

9. Die Verschiebung der Spektrallinien infolge der Bewegung des Objekts relativ zum Beobachter folgt der Formel (70), die für $\sigma = 0$ in die Einstein'sche übergeht, bei grossen Entfernungen aber, wegen der Kleinheit der Eigengeschwindigkeiten, mit der klassischen Formel eine bessere Übereinstimmung zeigt, als mit der relativistischen Einstein'schen.

Inhalt.

Seite.

Einführung 3

§ 1. Gruppe der hyperbolischen Bewegungen 4

§ 2. Distanz, Bogenelement, Winkelgrösse, Orthogonalität 8

§ 3. Isogonalräume von Parallelenbündeln (uneigentliche Sphären) 13

§ 4. Die Lobatschewski'schen Grenzsphären 19

§ 5. Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit im Weltraum 25

§ 6. Addition von Eigengeschwindigkeiten 33

§ 7. Translatorische Bewegung 39

§ 8. Anwendung auf Fernsignale 43

§ 9. Weltlinien der translatorischen Bewegung 50

§ 10. Transformation auf ein anderes Inertialsystem 55

§ 11. Scheinbare Deformation des Weltraumes 60

Zusammenfassung der wesentlichsten Resultate 64