Этюды по теоретической астрономіи, № 1.

Объ уравненіи Гаусса

$$\sin(z-q)=m\sin^4 z$$

при z близкомъ къ q

Т. Банахевича.

Études d'astronomie théorique, № 1.

Sur l'équation de Gauss

$$\sin(z-q)=m\sin^4 z$$

pour z voisin de q .

Par **Th. Banachiewicz.**

Юрьевъ (Jurieff).
Типографія К. Маттисена.
1917.

Предисловіе.

Изученіе огромной литературы, посвященной главной проблемѣ „теоретической астрономіи" — проблемѣ объ опредѣленіи орбиты изъ трехъ наблюденій —, и сопоставленіе ея съ результатами, вошедшими въ научный обиходъ, приводитъ къ заключенію, что большинство трудовъ по этому предмету не оставляетъ никакого слѣда въ наукѣ. Разсматривать разнообразныя причины этого явленія мы не будемъ, скажемъ лишь, что задачи нашихъ изслѣдованій нѣсколько отличны отъ обычныхъ, и что поэтому мы имѣемъ основаніе надѣяться на иную судьбу нашихъ работъ. Въ нашихъ этюдахъ по теоретической астрономіи мы далеки отъ всякой мысли о коренной ломкѣ методовъ, выработанныхъ могучими умами Лагранжа, Лапласа и Гаусса; мы также отнюдь не помышляемъ о завоеваніяхъ въ необъятной области преобразованія однѣхъ формулъ въ другія, и мы не стремимся къ упрощенію изложенія извѣстныхъ результатовъ — упрощенію, носящему обычно лишь субъективный характеръ.

Намъ удалось подмѣтить весьма интересную геометрическую аналогію между основными уравненіями проблемы Ольберса и Гаусса, удалось открыть неожиданно простыя, давно тщетно отыскивавшіяся, и въ послѣднее время невѣрно указанныя условія тройного рѣшенія проблемы объ опредѣленіи параболической орбиты, и удалось, наконецъ, устранить существенное неудобство при рѣшеніи центральнаго уравненія способа Гаусса. Этому послѣднему вопросу и посвященъ настоящій трудъ; его задача, слѣдовательно, весьма скромная, но мы надѣемся, что основанныя на немъ „Таблицы" окажутъ реальную пользу всѣмъ вычислителямъ планетныхъ орбитъ.

Уравненіе Гаусса $\sin(z-q)=m\sin^4 z$ рѣшалось до сихъ поръ послѣдовательными приближеніями, то-есть методомъ, употребленіе котораго лишь терпимо вычислителями, какъ malum necessarium; мы предлагаемъ прямое рѣшеніе помощью быстро сходящагося безконечнаго ряда. На практикѣ, вслѣдствіе чрезвычайно быстрой сходимости нашихъ рядовъ, достаточно будетъ ограничиться однимъ, иногда двумя и въ исключительныхъ лишь случаяхъ — тремя членами, просто вычисляемыми помощью нашихъ „Таблицъ". Такъ какъ, однако, приближенныя формулы только тогда могутъ разсчитывать на успѣхъ у вычислителей, если границы ихъ возможныхъ ошибокъ точно извѣстны и при этомъ весьма малы противъ ошибокъ закругленій, то мы обратили особое вниманіе на тщательное изученіе остаточнаго члена рядовъ. Разумѣется, что, для примѣненія на практикѣ нашихъ результатовъ, вычислитель не имѣетъ никакой надобности знакомиться съ теоріей рѣшенія, тѣмъ болѣе, что выводъ строкъ разными способами и численная ихъ провѣрка помощью десятизначнаго вычисленія даютъ полную гарантію безошибочности.

Наша работа состоитъ изъ двухъ частей. Въ первой — излагается теорія уравненія Гаусса, главнымъ образомъ лишь въ такомъ объемѣ, въ какомъ она необходима для обоснованія предлагаемаго нами рѣшенія. Вторую часть составляютъ вспомогательныя таблицы, названныя нами „основными", потому что онѣ могутъ быть приняты за надежную базу для разнообразныхъ менѣе обширныхъ таблицъ.

Мы сами уже воспользовались ими при изданіи небольшой таблицы для шестизначнаго рѣшенія уравненія Гаусса*), точность которой болѣе чѣмъ достаточна для обычныхъ цѣлей.

Читатель замѣтитъ въ нашей работѣ необычный знакъ ⩰; онъ служитъ для обозначенія приближеннаго равенства. Въ удобномъ символѣ для этого понятія давно замѣчалась потребность; знакъ ⩰, встрѣчающійся въ Philosophie de la Technie Гене-Вронскаго, заслуживаетъ вниманія по своей выразительности и однозначности.

Числа въ квадратныхъ скобкахъ [ ] въ текстѣ обозначаютъ ссылки на указатель литературы, которая впрочемъ играетъ въ нашемъ сочиненіи лишь второстепенную роль.

Недавно Charlier выступилъ противъ приписыванія Гауссу уравненія

$$\sin(z-q) = m \sin^4 z \quad . \tag{1}$$

Наше изслѣдованіе мы и начинаемъ (§ 1) съ перечисленія доводовъ, не позволяющихъ намъ отступить отъ общепринятаго названія. Въ тригонометрической формѣ упомянутое уравненіе у предшественниковъ Гаусса не встрѣчается; не подлежитъ, правда, сомнѣнію, что тѣ уравненія проблемы объ опредѣленіи орбитъ, къ которымъ она сводится при безконечно малыхъ промежуткахъ, извѣстны были и Ламберту, и Лагранжу, и Лапласу (въ частности сказанное относится къ основному уравненію восьмой степени). Однако только у Гаусса уравненіе (1) выступаетъ какъ строгое, такъ какъ имъ даются вполнѣ опредѣленныя указанія, какъ подойти къ строгимъ значеніямъ параметровъ m и q. То обстоятельство, что одно и то же уравненіе даетъ все болѣе и болѣе точныя значенія z, составляетъ одно изъ основныхъ и характерныхъ достоинствъ метода Гаусса.

Въ § 2 мы излагаемъ наиболѣе употребительные пріемы численнаго рѣшенія уравненія Гаусса. Попытку аналитическаго рѣшенія сдѣлалъ Вильевъ, но полученный имъ рядъ сходится медленно. Припомнивъ въ § 3 важнѣйшія свойства уравненія Гаусса, мы показываемъ (§ 4), что вводимый нами вспомогательный параметръ $t_1 = m \sin^4 q \operatorname{ctg} q$ есть функція лишь относительныхъ координатъ планеты. Величина t_1 является аргументомъ коэффиціентовъ нашихъ строкъ, и поэтому намъ необходимо было изслѣдовать предѣлы ея измѣненій. Для этого мы опираемся на извѣстную геометрическую интерпретацію (§ 5) величинъ μ и q.

Попутно мы устанавливаемъ интересную теорему о геометрическомъ мѣстѣ Ламбертовыхъ точекъ R: для планетъ съ опредѣленнымъ r Ламбертовы точки, оказывается, расположены на нѣкоторомъ кругѣ. Теорема эта позволяетъ построить графикъ для рѣшенія Лагранжева уравненія, болѣе простой, чѣмъ графики Шарлье или Яковкина.

Все время исходя изъ геометрическихъ соображеній, мы находимъ (§ 7) предѣлъ для угла $z-q$ въ области, въ которой обычно наблюдаются малыя планеты и для безконечно малыхъ промежутковъ. Мы указываемъ дальше (§ 8), какимъ образомъ, основываясь на малости $z-q$, можно *геометрически* прійти къ разнымъ системамъ формулъ, позволяющихъ быстро найти z итераціоннымъ процессомъ; предполагается при этомъ, что составлены таблицы, дающія корень нѣкотораго уравненія 4-ой степени съ однимъ перемѣннымъ коэффиціентомъ. Идея такого способа принадлежитъ, несомнѣнно, Штейнбринку, но послѣ того какъ въ 1915 г. А. Я. Орловымъ указаны были**) аналогичныя, но менѣе

---

*) Tables auxiliaires pour la résolution de l'équation de Gauss, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

**) Можно замѣтить, что заглавіе статьи А. Я. Орлова „Сведеніе вопроса объ опредѣленіи эллиптической орбиты къ рѣшенію уравненія 4-ой степени" не соотвѣтствуетъ ея содержанію уже и потому, что подъ степенью разрѣшающаго уравненія астрономы до сихъ поръ разумѣли степень уравненія хотя и приближеннаго, но обращающагося въ строгое при безконечно малыхъ промежуткахъ, что отнюдь не имѣетъ мѣста для уравненія А. Я. Орлова. Уравненіе это должно рѣшаться итераціей также при безконечно малыхъ интервалахъ; при такомъ пониманіи степени уравненія, вопросъ немедленно приводится въ уравненію первой степени; см. нашу статью [16].

совершенныя формулы, мы, занявшись этимъ вопросомъ, пришли независимо [16] къ преобразованію Штейнбринка.

Въ примѣчаніяхъ къ нашему разсужденію, стр. 1.47, мы показываемъ, какъ одно изъ преобразованій можетъ быть использовано для полу-графическаго, полу-аналитическаго нахожденія z, причемъ помощью графика миніатюрныхъ размѣровъ, состоящаго изъ однѣхъ прямыхъ линій, можно получить четвертый знакъ въ этой неизвѣстной. Подобное по принципу рѣшеніе предложено уже было Radau, но графикъ этого ученаго оказывается совершенно непригоднымъ въ случаѣ планетной орбиты.

Въ § 9 мы возвращаемся къ разсмотрѣнію параметра t_1; пользуясь его близостью къ нѣкоторой величинѣ τ', являющейся простой функціей отношенія $\sin z : \sin q$, мы и устанавливаемъ предѣлы его измѣненій.

Въ виду малости величины $z-q$ сравнительно съ z цѣлесообразно вычислять z черезъ посредство малаго угла $z-q$. Это замѣчаніе (§ 11) практически весьма важно, такъ какъ оно позволяетъ уменьшить число знаковъ во вспомогательныхъ таблицахъ и при вычисленіяхъ.

Въ § 12 мы приводимъ Гауссово уравненіе къ виду, разрѣшаемому быстро сходящейся строкой Лагранжа; исходя изъ остатка въ формѣ Коши, мы находимъ (§ 13) предѣлъ для остаточнаго члена и заключаемъ о сходимости нашихъ строкъ, пока $z-q < 2^0$, $\log t_1 < 8.900-10$. Пріемы нашего изслѣдованія представляютъ, можетъ быть, и нѣкоторый чисто математическій интересъ.

Доказавъ сходимость разложеній, мы указываемъ общій членъ разложенія для $\operatorname{tg}(z-q)$ и даемъ въ окончательномъ видѣ (§ 15) его первые три члена. Въ виду крайней сложности выкладокъ, показалось желательнымъ обосновать этотъ фундаментальный рядъ инымъ, болѣе простымъ путемъ. Мы остановились для этой цѣли на строкѣ Гене-Вронскаго.

Строка Вронскаго даетъ разложеніе, по степенямъ a, голоморфной функціи $\Pi(x)$ корня уравненія $f(x) - af_1(x) = 0$, гдѣ $f(x)$ и $f_1(x)$ суть заданныя функціи; въ частномъ случаѣ, когда $f(x) = x - a$, строка Вронскаго переходитъ въ рядъ Лагранжа. Если послѣдній рядъ и сохраняетъ за собой историческій интересъ, какъ первое рѣшеніе проблемы о разложеніи неявной функціи, то все же частный — по сравненію съ уравненіемъ Вронскаго — видъ уравненія Лагранжа естественнымъ образомъ ограничиваетъ область удобнаго его примѣненія. Въ нашей проблемѣ рядъ Вронскаго ведетъ къ рѣшенію, какъ оказалось, значительно болѣе просто. Вычисливъ (§ 16), по Вронскому, первые четыре члена разложенія $\log\sin(z-q)$, мы находимъ затѣмъ (§ 17) разложенія $\sin(z-q)$, $\cos(z-q)$, $\log\cos(z-q)$, $\log\operatorname{tg}(z-q)$, $\operatorname{tg}(z-q)$, элементарнымъ путемъ *послѣдовательно*, достигая такимъ образомъ контроля отдѣльныхъ звеньевъ длинной цѣпи выкладокъ*): коэффиціенты ряда для $\operatorname{tg}(z-q)$ оказались тождественными съ найденными выше.

Остановившись еще нѣсколько (§ 18) на разложеніяхъ для $\log\operatorname{tg}(z-q)$, $z-q$, $\log\sin z$, мы приводимъ (§ 19) табличку численныхъ значеній членовъ разложенія $\log\operatorname{tg}(z-q)$, дающую читателю наглядную картину убыванія членовъ въ нашихъ рядахъ; при этомъ оказывается, что остаточный членъ, найденный по Коши, плохо характеризуетъ степень сходимости.

Мы выводимъ поэтому въ слѣдующихъ §§ другое аналитическое выраженіе остатка четырехчленной формулы для $\log\sin(z-q)$. Какъ ни проста сравнительно формула Вронскаго, но однако полученіе изъ нея четвертой производной $\log\sin(z-q)$ по основному аргументу представляло бы уже немалыя вычислительныя затрудненія; мы предпочли поэтому употребить въ нашемъ изслѣдованіи нѣкоторую форму остатка, прямо вытекающую изъ Лагранжева остатка ряда Тайлора, но содержащую лишь третьи производныя. Въ результатѣ получается, что, останавливаясь въ разложеніи $\log\sin(z-q)$ на четвертомъ членѣ, мы дѣлаемъ ошибку, находящуюся далеко за предѣлами точности семизначнаго вычисленія. При этомъ четвертый членъ настолько малъ, что онъ можетъ быть въ достаточной мѣрѣ учтенъ соотвѣтственнымъ измѣненіемъ (§ 23) коэффиціента третьяго члена.

Трехчленная формула для искомыхъ функцій и положена въ основу „Таблицъ для семизначнаго вычисленія"; обычно, впрочемъ, и третій членъ ничтожно малъ.

---

*) Большую часть выкладокъ §§ 14—18 продѣлалъ независимо, во вторую руку, студентъ г. К. Купфферъ.

Въ § 24 мы даемъ подробное описаніе самихъ „Таблицъ“; при этомъ справедливость употребляемыхъ разложеній провѣрена еще разъ, путемъ численныхъ выкладокъ помощью десятизначныхъ логариѳмовъ для близкихъ къ максимальнымъ значеній $z - q$. Въ § 25 читатель найдетъ описаніе способа вычисленія „Таблицъ“.

Въ заключеніе считаю своимъ долгомъ выразить глубокую и искреннюю признательность профессору К. Д. Покровскому, Директору Юрьевской Обсерваторіи, предоставившему мнѣ полную свободу въ научныхъ занятіяхъ. Сослуживецъ мой по Обсерваторіи В. Р. Бергъ любезно взялъ на себя чтеніе моей работы въ первой корректурѣ и обратилъ мое вниманіе на разные мелкіе промахи; подобную же помощь относительно первыхъ листовъ оказалъ г. С. Савичъ-Заблоцкій. Нѣкоторое участіе въ моей работѣ, ближе указанное въ текстѣ, приняли студенты гг. Купфферъ и Свенсонъ. Всѣмъ названнымъ лицамъ приношу сердечную благодарность.

Оглавленіе къ этюдамъ объ уравненіи Гаусса $\sin(z-q) = m\sin^4 z$.

1. Теорія.

2. Таблицы.

(Основныя Таблицы для уравненія Гаусса примѣнительно къ семизначному вычисленію планетной орбиты).

I. Объ уравненіи Гаусса
$\sin(z-q) = m\sin^4 z.$

§ 1. Предметомъ настоящаго изслѣдованія является уравненіе Гаусса [1, art. 141]:

$$\sin(z-q) = m\sin^4 z \tag{1}$$

въ которомъ m и q считаются извѣстными, z — искомымъ. Мы имѣемъ въ виду практическую цѣль: облегчить рѣшеніе Гауссова уравненія при опредѣленіи эллиптической орбиты малой планеты; мы будемъ поэтому предполагать, что m и q суть положительныя числа, и что искомый корень z близокъ къ q.

Charlier [2, I p. 2] полагаетъ, что основное уравненіе восьмой (седьмой) степени задачи объ опредѣленіи орбитъ „въ литературѣ прошлаго столѣтія носитъ невѣрное названіе уравненія Гаусса", и что уравненіе это должно называться Лагранжевымъ. По этому поводу можно замѣтить, прежде всего, что въ сочиненіяхъ по теоретической астрономіи (см. Bauschinger [3, p. 270], Herglotz [4, p. 397], Ивановъ [5, p. 254], Pizzetti [6], Tisserand-Perchot [7, p. 55—56]) и понынѣ говорятъ объ „уравненіи Гаусса"; названіе это приписывается однако отнюдь не *приближенному* уравненію 8-ой степени, данному Лагранжемъ [8, II mem. № 13]

$$(\varrho_2-\lambda m^2)^2\,[R_2{}^2 + 2\,\varrho_2 R_2\,\cos(a_2-A_2)\cos\beta_2 + \varrho_2{}^2]^3 - \lambda^2 F^2 = 0 \tag{2}$$

но тому простому и *строгому* уравненію (1), которое получается въ результатѣ исключенія ϱ изъ уравненій

$$\varrho = k - l : r^3 \qquad\qquad r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\,R\varrho\cos\psi, \tag{3}$$

послѣ введенія вспомогательной Гауссовой неизвѣстной z по уравненію:

$$\sin z = \varrho\sin\psi : R. \tag{4}$$

Въ мемуарахъ Лагранжа нѣтъ и намека на возможность свести задачу къ простому уравненію $\sin(z-q) = m\sin^4 z$, почему и нѣтъ основаній это уравненіе приписывать ему.

Уравненія (1) и (2) различны впрочемъ не только по формѣ, но и по содержанію. Уравненіе Гаусса — строго; правда, оно не даетъ сразу же, при первомъ рѣшеніи, истиннаго значенія r, но происходитъ это отъ того, что параметры k и l, фигурирующіе въ (3), опредѣляются лишь послѣдовательными приближеніями. Что же касается до Лагранжева уравненія (2), то при выводѣ его Лагранжъ пренебрегалъ малыми высшихъ порядковъ, и поэтому оно не можетъ претендовать на строгость. Только Лапласъ [9, № 31] указалъ тѣ значенія параметровъ, при которыхъ уравненіе (2) обращается въ строгое; самъ же Лагранжъ видѣлъ въ уравненіи (2) лишь приближенное соотношеніе. Такъ, въ концѣ своего третьяго (послѣдняго), поистинѣ блестящаго мемуара, онъ говоритъ „on aura une équation en r seul, laquelle pourra monter à la verité à un degré assez haut, mais qu'on pourra *dans une première approximation* réduire au huitieme degré" (курсивъ нашъ).

Вообще мнѣніе Charlier (l. c.) о томъ, что Лагранжемъ дано аналитическое рѣшеніе проблемы орбитъ, мы считаемъ увлеченіемъ. Въ формулахъ Лагранжа даны явно лишь главные члены, причемъ онъ указалъ на *теоретическую* возможность пополненія ихъ членами высшихъ порядковъ; только Гауссомъ даны были законченныя, вполнѣ опредѣленныя формулы, позволяющія воспроизвести наблюденія съ любой точностью.

По мнѣнію Гаусса [1, art. 150] только такой методъ можетъ считаться рѣшеніемъ задачи, который позволяетъ достигнуть любой степени приближенія. Съ такой точки зрѣнія, не только формулы Лагранжа, но и тѣ болѣе совершенныя формулы, которыя вывелъ Charlier [2] (по Лагранжу), не рѣшаютъ задачи объ опредѣленіи орбитъ, такъ какъ общій видъ коэффиціентовъ рядовъ Charlier неизвѣстенъ.

Можно еще замѣтить, что уравненіе (2) можетъ быть разсматриваемо, какъ аналитическая интерпретація усовершенствованнаго геометрическаго равенства Ламберта [10, § 16]; см. напр. Bruns [11].

Наконецъ, въ то время какъ неизвѣстная въ уравненіи (2) является функціей *трехъ* параметровъ λm^2, $\cos(a_2-A_2)\cos\beta_2$, λF, неизвѣстная z зависитъ лишь отъ *двухъ* параметровъ: m и q, что является, безспорно, важнымъ аналитическимъ упрощеніемъ.

§ 2. Уравненіе Гаусса играетъ центральную роль при опредѣленіи эллиптическихъ элементовъ по способу *Theoria motus*; встрѣчаясь вновь въ каждомъ приближеніи, оно должно рѣшаться по нѣсколько разъ при всякомъ опредѣленіи орбиты.

До сихъ поръ прямого рѣшенія уравненія (1) или имѣющаго тѣ же корни алгебраическаго уравненія восьмой степени (относительно $\sin z$)

$$m^2\sin^8 z - 2\,m\cos q\,\sin^5 z + \sin^2 z - \sin^2 q = 0 \tag{1*}$$

не существовало; поэтому на практикѣ z опредѣлялось помощью послѣдовательныхъ приближеній. Не вдаваясь въ подробности, перечислимъ главнѣйшіе пріемы рѣшенія.

Для вычисленій послѣдовательными приближеніями важно, чтобы исходное значеніе неизвѣстной было возможно близко къ истинѣ. Binet [1, art. 142] свелъ задачу къ слѣдующему простому построенію. Полагая $\operatorname{ctg} z = x$, получаемъ изъ (1)

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\cos q}{m} - \frac{\sin q}{m}x,$$

и слѣдовательно вопросъ сводится къ опредѣленію пересѣченій кривой $y=(1+x^2)^{-3/2}$ — которая можетъ быть вычерчена разъ навсегда — съ прямой $y=\frac{\cos q}{m}-\frac{\sin q}{m}x$. Графики кривой Binet, — а также кривой $y=x^4(1+x^2)^{-3/2}$, болѣе удобной при z близкомъ ко 0^0 или 180^0, — приложены къ мемуару [12] проф. Р. Фогеля.

Для той же цѣли можно бы также начертить діаграмму семейства кривыхъ $y=m\sin^4 x$, съ перемѣннымъ параметромъ m, и опредѣлять точку пересѣченія одной изъ кривыхъ діаграммы съ подвижной синусоидой $y=\sin(x-q)$. Объ этомъ построеніи упоминаемъ потому, что изслѣдуя точки пересѣченія именно этихъ кривыхъ Энке [13, № 12] и вывелъ свои извѣстныя заключенія относительно корней уравненія Гаусса.

Pizzetti [6] вычертилъ кривыя семейства $\sin(x-y)=m\sin^4 x$, которыя очевидно можно также использовать при рѣшеніи задачи. Замѣтимъ, что точность графическихъ пріемовъ вообще довольно мала, и поэтому довести съ ихъ помощью рѣшеніе до конца, не прибѣгая къ вычисленіямъ, *нельзя*. Графики даютъ наглядное представленіе о свойствахъ уравненія Гаусса и могутъ оказаться полезными при кратномъ рѣшеніи. Но для малыхъ планетъ рѣшеніе практически всегда однозначно, и поэтому проще съ самаго начала итти вычислительнымъ путемъ.

При маломъ $z-q$, первое приближенное значеніе z_1 можетъ быть найдено изъ формулы $\sin(z_1-q)=m\sin^4 q$; болѣе точное, по Tietjen'у [3, p. 272], изъ формулы

$$\sin(z_1-q)=\frac{m\sin^4 q}{1-4\,t_1}$$

гдѣ обозначено

$$t_1 = m\sin^4 q\operatorname{ctg} q \tag{5}$$

Еще болѣе точное значеніе z_1 можетъ быть получено изъ формулъ Witt'a [14]

$$\log\sin(z_1-q)=\log(m\sin^4 q)+\frac{4t_1}{1-4t_1}.Mod \quad \text{или} \quad \log\sin(z_1-q)=\log(m\sin^4 q)+\frac{4t_1}{\sqrt{1-7t_1}}.Mod$$

гдѣ t_1 опредѣляется формулой (5), $Mod=0.43429\ldots$ есть модуль натуральныхъ логариѳмовъ. Witt [l. c.] указываетъ и способъ для перехода отъ z_1 къ окончательному значенію z, но его нѣсколько сложныя формулы представляютъ интересъ лишь съ алгебраической точки зрѣнія.

При наличіи вспомогательныхъ таблицъ исключительную точность даетъ формула Steinbrink'a*), напечатанная впервые Witt'омъ [14]:

$$\sin(z-q)=m\sin^4 q\,\varphi \tag{6}$$

гдѣ φ опредѣляется въ функціи $t=t_1$ изъ уравненія

$$\varphi=(1+\varphi t)^4 \tag{7}$$

Нѣсколько точнѣе можно положить [16]:

$$\operatorname{tg}(z_1-q)=m\sin^4 q\,\varphi \tag{8}$$

причемъ окончательное значеніе z можетъ быть найдено, по Banachiewicz'y [16], изъ выраженій**)

$$\log\operatorname{tg}(z-q)=\log\operatorname{tg}(z_1-q)+3(1+\varkappa)\log\cos(z_1-q) \tag{9}$$

или

$$z-z_1=-\frac{3}{2}(1+\varkappa)\operatorname{tg}^3(z_1-q) \tag{10}$$

гдѣ $\varkappa=d\log\varphi:d\log t$. Такой методъ требуетъ составленія особыхъ вспомогательныхъ таблицъ, которыя пока изданы были [16] лишь для пятизначнаго вычисленія.

Послѣ того, какъ уже извѣстно z_1, для отысканія z примѣняютъ Гауссовскій [1, art. 11] пріемъ логариѳмическихъ приращеній, вычисляя $\Delta\log(\sin(z_1-q):m\sin^4 z_1)$ для $\Delta z_1=1''$; обыкновенно приходится продѣлывать нѣсколько приближеній. — Съ аналитической точки зрѣнія наиболѣе просто казалось бы употребленіе итераціи

$$\sin(z_{n+1}-q)=m\sin^4 z_n \qquad z=\lim\sin z_n$$

но сходимость этого процесса весьма медленная.

Въ общемъ, какъ видимъ, уравненіе Гаусса могло рѣшаться лишь послѣдовательными приближеніями — способомъ, примѣняемымъ вычислителями вообще лишь за неимѣніемъ лучшаго.

Для нахожденія приближеннаго корня z_1 можно пользоваться тѣми пріемами, которые выработаны для рѣшенія уравненій (3), при условіи

$$l=kR^3; \tag{11}$$

дѣло въ томъ, что условіе (11) обыкновенно на практикѣ близко къ истинѣ. Вспомогательныя таблицы для нахожденія r въ функціи k и элонгаціи ψ имѣются въ трактатѣ Оппольцера]17, табл. XIIIa и XIIIb], и въ значительно расширенномъ Leuschner'омъ видѣ въ 3-ьемъ изданіи Клинкерфуэса [18, табл. XVI]. Менѣе подробно у Charlier'a [19]. Діаграммы даны въ статьѣ Mello e Simas [20, табл. VIII]; тамъ же и таблицы. Простая номограмма указана нами въ настоящей работѣ; см. ниже § 6.

---

*) Недавно А. Я. Орловъ [15], очевидно не зная статьи Witt'a, указалъ нѣкоторыя менѣе совершенныя формулы. Разбирая [16] интересную статью Орлова, мы независимо нашли преобразованіе Штейнбринка [14].

**) Значенія остаточныхъ членовъ формулы (9) и (10) при $z-q<2^0$ найдены были позднѣе и даны въ Таблицахъ III-ей и IV-ой, приложенныхъ къ настоящему изслѣдованію (стр. 2.22 и 2.23).

§ 3. Напомнимъ здѣсь важнѣйшія свойства уравненія Гаусса. Задача объ опредѣленіи орбиты приводитъ къ уравненіямъ

$$\varrho = k - \frac{l}{r^3} \quad (12), \qquad r^2 = \varrho^2 + 2R\varrho\cos\delta + R^2 \quad (13)$$

гдѣ ϱ и r суть искомыя разстоянія планеты отъ Земли и Солнца, R — радіусъ векторъ Земли, $\delta = 180^0 - \psi$ видимая элонгація планеты отъ точки на сферѣ, противоположной солнцу, k и l нѣкоторыя величины, принимаемыя за извѣстныя. Гауссъ вводитъ въ качествѣ новой неизвѣстной уголъ z при планетѣ, въ треугольникѣ солнце — планета — земля, такъ что

$$\sin z = \frac{R\sin\delta}{r} \qquad (14)$$

Если положить

$$\left.\begin{aligned} \mu\sin q &= R\sin\delta \\ \mu\cos q &= R\cos\delta + k \end{aligned} \qquad \mu > 0 \right\} \qquad (15)$$

$$m = \frac{l}{\mu(R\sin\delta)^3} \qquad (16)$$

то въ результатѣ исключенія ϱ и r изъ (12), (13), (14) и получается

$$\sin(z - q) = m\sin^4 z. \qquad (1)$$

Въ виду геометрическаго значенія угла z, вычислителя могутъ интересовать только тѣ корни для $\sin z$, которые даютъ z заключенное между 0 и δ.

Въ случаѣ безконечно малыхъ промежутковъ между наблюденіями

$$l = kR^3; \qquad (11)$$

при изслѣдованіи свойствъ Гауссова уравненія допускаютъ, что условіе (11) выполнено, или, по крайней мѣрѣ, что уравненія (13) имѣютъ „земной“ корень $\varrho = 0$ (чего на самомъ дѣлѣ можетъ и не быть при значительныхъ интервалахъ). Слѣдуетъ поэтому имѣть въ виду, что результаты, получаемые въ этомъ допущеніи, — напримѣръ относительно возможнаго числа рѣшеній проблемы, — носятъ условный характеръ теоремъ для идеальнаго случая, и на практикѣ могутъ допускать исключенія. При строгомъ — *пока никѣмъ не данномъ* — рѣшеніи вопроса о числѣ орбитъ, удовлетворяющихъ тремъ наблюденіямъ, надо бы принять во вниманіе измѣняемость k и l; ср. замѣчанія въ мемуарѣ Р. Фогеля [12, стр. 12—14].

Въ предположеніи, что $R^3 k$ *достаточно* близко къ l, и что k и l можно считать заданными числами, выводятъ слѣдующія свойства Гауссова уравненія.

1) Уравненіе (1) допускаетъ корень z близкій къ δ, соотвѣтствующій земной орбитѣ (Гауссъ) [1, art. 142]. Въ самомъ дѣлѣ: равенство $\sin(\delta - q) = m\sin^4\delta$ есть тожество при $R^3 k = l$.

Это извѣстное положеніе не оправдывается въ классическомъ примѣрѣ Цереры! Соотвѣтственное уравненіе есть $\sin(z - 187^0 15') = [1.2066]\sin^4 z$; „земной“ корень, $z = 18^0 49'$, уравненію Гаусса отнюдь не удовлетворяетъ. Въ этомъ случаѣ наблюденія охватываютъ періодъ въ 260 дней.

2) Такъ какъ уравненіе (1) можетъ имѣть не болѣе 3 положительныхъ корней, изъ числа которыхъ надо отнять одинъ, принадлежащій земной орбитѣ, то на долю неизвѣстныхъ орбитъ остается не болѣе двухъ корней (Gauss [1], Encke [13]). При 3 корняхъ, то-есть для двойного рѣшенія, должно быть $\delta > 63^0 26'$ (Encke [13]). — Новыя малыя планеты наблюдаются преимущественно около оппозиціи, когда уголъ δ малъ;

поэтому при опредѣленіи орбиты малой планеты отыскивать второй корень Гауссова уравненія не приходится (онъ принадлежитъ землѣ), и можно довольствоваться опредѣленіемъ наименьшаго корня.

Charlier, замѣтивъ, что возможность двойного рѣшенія зависитъ исключительно отъ положенія свѣтила въ пространствѣ, изобразилъ на чертежѣ ([21] и [2, I p. 13]) относительное положеніе планеты въ случаѣ двойного рѣшенія.

3) Уголъ q не превосходитъ по численному значенію $\arcsin {}^3/_5 = 36^0 52'\!.2$ (Encke) [13, № 12]. Онъ положителенъ, если $r > R$, и отрицателенъ, при $r < R$.

Правило относительно знака q, встрѣчаемъ у Bauschinger'a, въ его Таблицахъ [22, p. 104]. Оно является слѣдствіемъ геометрической интерпретаціи q, указанной Lehmann-Filhès'омъ [23]; сравни также Sidler [24]. Аналитическій выводъ, см. Kopff [25].

§ 4. Въ дальнѣйшемъ важную роль играетъ вспомогательная величина

$$t_1 = m \sin^4 q \operatorname{ctg} q = m \sin^3 q \cos q\,; \tag{5}$$

намъ необходимо нѣсколько остановиться на ея свойствахъ. Ограничиваемся при этомъ идеальнымъ случаемъ, когда равенство (11) строго выполнено.

Замѣтимъ прежде всего, что если дано геоцентрическое положеніе планеты въ моментъ средняго наблюденія, то-есть если даны координаты ϱ и δ, то этимъ вполнѣ опредѣляются величины m и q. Въ самомъ дѣлѣ: изъ уравненія (13) можемъ тогда опредѣлить r, послѣ чего (12), при условіи (11), даетъ k, и правыя части уравненій (15) становятся извѣстными, что позволяетъ опредѣлить μ и q. Наконецъ уравненіе (16) даетъ m.

Такимъ образомъ t_1 можетъ быть разсматриваемо, какъ функція исключительно относительныхъ координатъ планеты, и поэтому уравненіе

$$t_1 = t_1(\varrho, \delta) = \text{const.} \tag{17}$$

представляетъ изъ себя на плоскости нѣкоторую кривую, въ пространствѣ же — поверхность вращенія. Лучшую картину измѣняемости t_1 могла бы дать діаграмма семейства кривыхъ, получающихся изъ уравненія (17) при разныхъ значеніяхъ константы. Однако составленіе діаграммы и аналитическое изслѣдованіе ея свойствъ представляло бы немалыя затрудненія, вслѣдствіе того, что кривыя $t_1(\varrho, \delta) = \text{const.}$ суть алгебраическія кривыя весьма высокаго порядка.

Для нашихъ цѣлей достаточно будетъ изслѣдовать предѣлы измѣняемости t_1 въ той области междупланетнаго пространства, въ которой обычно наблюдаются малыя планеты при ихъ открытіи. Изслѣдованіе мы проведемъ, разсматривая вмѣсто t_1 нѣкоторую близкую къ ней величину τ', являющуюся въ свою очередь простой функціей отъ геометрически наглядной величины

$$f = \frac{\sin z}{\sin q} \ . \tag{18}$$

При этомъ мы будемъ пользоваться геометрической интерпретаціей величинъ μ и q. Мы должны здѣсь поэтому привести извѣстныя построенія; заодно мы впрочемъ выведемъ теорему, приводящую, между прочимъ, къ новой діаграммѣ для опредѣленія неизвѣстной r.

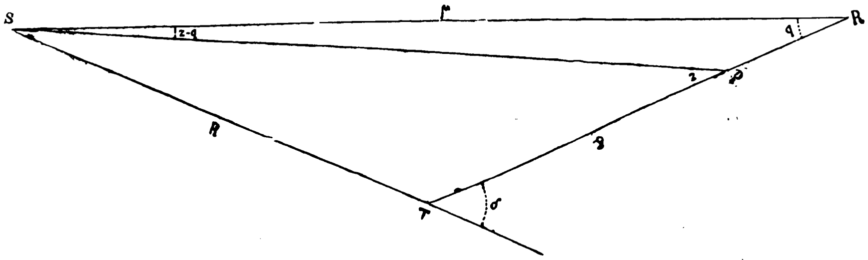
§ 5. Вспомогательныя величины μ и q имѣютъ простое геометрическое значеніе. Разсматриваемъ (черт. 1) треугольникъ съ вершинами въ S (солнце), T (земля), P (планета). Имѣемъ въ немъ: $\overline{ST} = R$, $\overline{SP} = r$, $\overline{TP} = \varrho$, $\sphericalangle STP = \psi = 180^0 - \delta$, $\sphericalangle SPT = z$.

Отложимъ на прямой TP отрѣзомъ $\overline{TR}=k$, и соединяемъ прямой точку S съ R. Проектируя отрѣзокъ $\overline{RS}$ на прямую TR и на направленіе ей перпендикулярное, получимъ соотвѣтственно

$$\overline{RS}\cos(SRT)=R\cos\delta+k \qquad \overline{RS}\sin(SRT)=R\sin\delta \tag{19}$$

и, сравнивая эти равенства съ (15), заключаемъ

$$\overline{RS}=\mu \qquad \sphericalangle SRT=q \qquad \text{ч. и т. д.}$$



Черт. 1.

Задачу объ опредѣленіи r по даннымъ μ, q, l мы можемъ формулировать геометрически слѣдующимъ образомъ. Дано $\overline{RS}=\mu$ и прямая RT, заданная угломъ q, который она образуетъ съ направленіемъ $\overline{RS}$. Требуется найти на прямой RT точку P такую, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\overline{RP}=l:\overline{PS}^3 \tag{20}$$

Для построенной такимъ образомъ точки P имѣемъ $\overline{PS}=r$. Чтобы въ этомъ убѣдиться, на прямой RT строимъ точку T въ разстояніи k отъ R. Точка T отстоитъ на разстояніи R отъ точки S, и уголъ STR равенъ $180^0-\delta$; сказанное видно изъ уравненій (15), которыми опредѣляются величины μ и q въ функціи R, k и δ. Обозначая $TP=\varrho$ мы имѣемъ

$$\overline{PS}^2=\varrho^2+2R\varrho\cos\delta+R^2, \qquad \varrho=k-l:\overline{PS}^3$$

(второе уравненіе по построенію); сравнивая эти уравненія съ (12) и (13) мы и заключаемъ

$$\overline{PS}=r \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Къ рѣшенію равносильной геометрической задачи свелъ проблему объ опредѣленіи r еще Ламбертъ [10, § 16], предполагавшій все же $l=kR^3$, т. е. задававшійся такимъ частнымъ значеніемъ l, какое эта величина имѣетъ при безконечно малыхъ промежуткахъ.

Замѣчая, что

$$\overline{PS}^2=\overline{SR}^2+\overline{RP}^2-2\,\overline{SR}\,.\,\overline{RP}\cos q,$$

подставляя въ это уравненіе $\overline{RP}$ изъ (20), и полагая $\overline{PS}=r$, мы приходимъ къ аналитической формулировкѣ нашей задачи объ опредѣленіи r:

$$r^2=\mu^2+\left(\frac{l}{r^3}\right)^2-2\mu\frac{l}{r^3}\cos q; \tag{21}$$

это и есть основное уравненіе восьмой степени проблемы объ опредѣленіи орбитъ, фигурирующее у Лагранжа въ значительно болѣе сложномъ видѣ, ср. ур. (2). Отмѣтимъ, что геометрическая постановка проблемы Ламбертомъ приводитъ непосредственно къ самой простой формѣ уравненія Лагранжа (ср. § 1, мелк. шр.), которые поэтому можно бы называть уравненіемъ Ламберта-Лагранжа.

Чтобы получить уравненіе Гаусса, примѣняемъ къ треугольнику RSP теорему синусовъ; принимая во вниманіе, что уголъ при вершинѣ S есть $z-q$, получимъ

$$\sin(z-q) : \sin z = (l : r^3) : \mu. \tag{21*}$$

Подставляя сюда значеніе r изъ (14), имѣемъ,

$$\sin(z-q) = \frac{l}{\mu R^3 \sin^3\delta} \cdot \sin^4 z,$$

и, принимая во вниманіе опредѣленіе (16) m:

$$\sin(z-q) = m \sin^4 z \tag{1}$$

т. е. уравненіе Гаусса.

Замѣтимъ здѣсь еще важное соотношеніе, получаемое изъ треугольника SPR:

$$\sin z = f . \sin q \tag{18}$$

въ которомъ обозначено

$$f = \mu : r \tag{22}$$

§ 6. Вмѣсто l вводимъ новый параметръ λ по уравненію

$$l = \lambda^3 k R^3; \tag{23}$$

при безконечно малыхъ промежуткахъ:

$$\lambda = 1 \tag{24}$$

Для сокращенія писанія условимся линейныя разстоянія выражать здѣсь въ единицахъ R и обозначаемъ:

$$\frac{r}{R} = r_1 \qquad \frac{\varrho}{R} = \varrho_1 \qquad \frac{k}{R} = k_1 \tag{25}$$

Уравненія (12) и (13) съ новыми обозначеніями даютъ

$$\varrho_1 = k_1 \left(1 - \frac{\lambda^3}{r_1^3}\right) \quad (26) \qquad\qquad r_1^2 = 1 + 2\varrho_1 \cos\delta + \varrho_1^2; \quad (27)$$

если же ввести еще „увеличительный факторъ“ $v(\lambda)$ по формулѣ

$$v(\lambda) = \frac{r_1^3}{r_1^3 - \lambda^3}, \tag{27'}$$

то уравненія (26, 27) принимаютъ видъ:

$$k_1 = \varrho_1 v \quad (26^*), \qquad\qquad r_1^2 v^2 = v^2 + k_1^2 + 2 k_1 v \cos\delta \quad (27^*)$$

Пусть λ имѣетъ какое-нибудь опредѣленное значеніе (напр. $\lambda = 1$). Каждому положенію планеты P въ пространствѣ соотвѣтствуетъ тогда вполнѣ опредѣленная точка R (черт. 1). Въ самомъ дѣлѣ: точка R лежитъ, согласно ея опредѣленію, на прямой TP, въ разстояніи k_1 отъ T; но k_1 опредѣляется вполнѣ изъ (26*). Задаемся вопросомъ: *каково геометрическое мѣсто точекъ R, соотвѣтствующихъ заданному разстоянію r_1 планеты отъ солнца?* Другими словами, что можно сказать о положеніи Ламбертовой точки R, если извѣстно, что радіусъ векторъ планеты есть r_1?

Вводимъ въ разсмотрѣніе точку C (не нанесенную на чертежѣ), съ полярными координатами, относительно T, равными: $\varrho_c = v$, $\delta_c = 180^0$; точка C расположена слѣдовательно на прямой TS въ разстояніи v отъ T. Такъ какъ полярныя координаты R суть k_1 и δ, то правая часть уравненія (27*) представляетъ изъ себя квадратъ разстоянія C отъ R. Имѣемъ поэтому

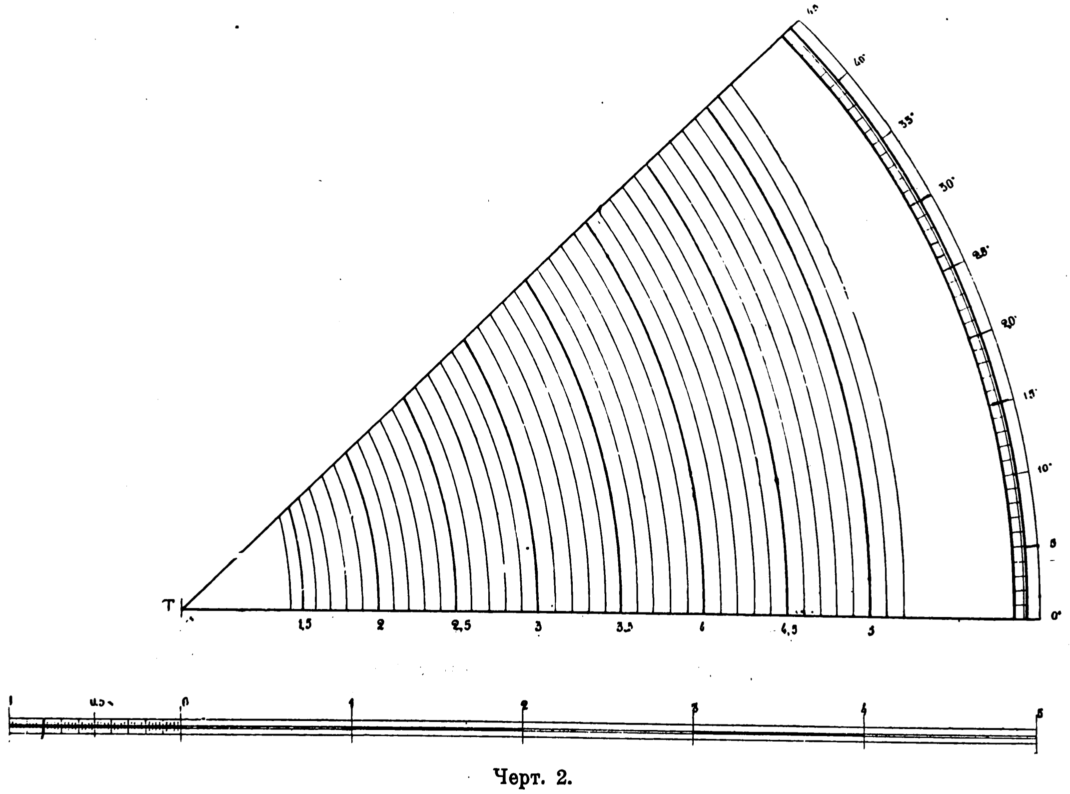
$$r_1^2\,v^2 = \overline{CR}^2 \tag{27**}$$

Но лѣвая часть (27**) при сдѣланныхъ предположеніяхъ постоянна, и мы можемъ заключить: **геометрическое мѣсто точекъ R есть кругъ съ радіусомъ $r_1 . v$ и центромъ въ C.** Кругъ этотъ можетъ быть также полученъ (см. уравн. 26*) путемъ откладыванія на прямой TP — при всевозможныхъ ея положеніяхъ — отрѣзка $\overline{TR} = v . \overline{TP}$.

Эта теорема позволяетъ указать весьма простую діаграмму для рѣшенія уравненій (24, 25) при всякомъ значеніи λ. Для этого стоитъ только вычертить семейство круговъ

$$(x+v)^2 + y^2 = (r_1\,v)^2, \qquad (D\lambda)$$

гдѣ $v = r_1^3 : (r_1^3 - \lambda^3)$, и перемѣннымъ параметромъ, которымъ помѣчены круги, считается r_1: **помѣтка круга, проходящаго черезъ точку R, съ полярными координатами k_1 и δ и будетъ искомымъ r_1.** Чертежъ 2 и представляетъ



Черт. 2.

Номограмма для опредѣленія геліоцентрическаго разстоянія по заданнымъ k и δ.

Способъ употребленія: наносятъ точку съ полярными координатами (относительно T) $k_1 = k : R$ и δ. Помѣтка круга, проходящаго чрезъ эту точку, есть $r_1 = r : R$. Примѣръ: $k_1 = 2.05$, $\delta = 10^0\!.5$. Номограмма даетъ: $r_1 = 2.96$.

изъ себя такую діаграмму (D_1), для $\lambda = 1$. Употребленіе діаграммы несложно; пусть, напримѣръ, (при $\lambda = 1$), $k_1 = 2.05$, $\delta = 10^0\!.5$ (см. черт. 2). Построивъ по этимъ полярнымъ координатамъ Ламбертову точку R, отсчитываемъ непосредственно $r_1 = 2.96$.

Если бы имѣть подобную діаграмму для разныхъ круглыхъ значеній λ, то можно бы рѣшать систему (26, 27) путемъ интерполяціи, находя r_1 для пары значеній λ, охватывающей заданное. Нетрудно однако видѣть, что для этой цѣли достаточно и одной діаграммы D_1.

Въ самомъ дѣлѣ, *какимъ образомъ перейти отъ семейства D_1 къ $D\lambda$?* Уравненіе ($D\lambda$) показываетъ, что для этого достаточно увеличить въ λ разъ радіусъ круга (D_1) описаннаго изъ точки ($-v$, 0), ибо радіусъ этотъ $=r_1 v=\lambda v\sqrt[3]{\frac{v}{v-1}}$; послѣ этого каждый изъ производныхъ круговъ придется помѣтить числомъ $\lambda\sqrt[3]{\frac{v}{v-1}}$, то-есть λ разъ взятой помѣткой производящаго круга.

Въ виду этого рѣшеніе, помощью діаграммы D_1, системы (26, 27) сводится къ отысканію *такого* круга K_1 семейства D_1, *который* будучи увеличенъ — при неизмѣнномъ положеніи центра — въ λ разъ прошелъ бы черезъ заданную точку R. Взятая λ разъ помѣтка K_1 и есть искомое r_1. Въ свою очередь нахожденіе K_1 можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ. Проводимъ на діаграммѣ прямую $y=\frac{1}{\lambda}k_1\sin\delta$. Изъ R описываемъ кругъ K_2 произвольнымъ радіусомъ и на только что упомянутой прямой отыскиваемъ точку M, которая, находясь на одномъ изъ круговъ K_3 семейства D_1, одинаково отстояла бы отъ двухъ точекъ пересѣченія того же круга K_3 съ кругомъ K_2. Кругъ K_3, проходящій черезъ такую точку, и есть искомый $K_3=K_1$, потому что MR нормально къ K_3 и кругъ K_3, расширившись λ разъ, пройдетъ черезъ точку R.

Примѣчаніе. Графическое рѣшеніе уравненій (26, 27), ***при*** $\lambda=\mathbf{1}$, помощью сложныхъ кривыхъ $k_1=$ const., предложено Charlier [19]. Результатомъ этого мемуара Шарлье является нѣсколько примитивная таблица [19, стр. 16—17] для нахожденія геоцентрическаго разстоянія; ср. табл. XIII a, b учебника Оппольцера [17].

А. А. Яковкинъ [26] придумалъ изящный способъ рѣшенія (26, 27), *при произвольномъ* λ, помощью діаграммы простого семейства круговъ и семейства прямыхъ; рѣшеніе достигается *послѣдовательными приближеніями.*

§ 7. Изслѣдуемъ здѣсь предѣлы угла $z—q$ для планетоидной орбиты. Если мы имѣемъ дѣло съ малой планетой, то можно принять

$$5.5\geqslant r\geqslant 1.5 \quad ; \tag{28}$$

наблюденія малыхъ планетъ производятся обычно около эпохи противостоянія и уголъ δ — разстояніе планеты отъ антигелія — бываетъ малъ. Мы примемъ лишь

$$\delta\leqslant 63^{\circ}26' \quad , \tag{29}$$

взявъ произвольно за верхній предѣлъ δ самое большое его значеніе, при которомъ опредѣленіе орбиты еще всегда однозначно (по Энке). Въ разсмотрѣніяхъ этого параграфа мы считаемъ $R=1$ и ограничиваемся идеальнымъ случаемъ (24) безконечно-малыхъ промежутковъ; полагаемъ слѣдовательно

$$l=k \quad . \tag{30}$$

Покажемъ, что пока планета находится въ области (28, 29) уголъ $z—q$ малъ, — меньше 6°2.

Уравненіе (21*), при условіи (30), даетъ

$$\sin(z-q)=\frac{1}{\mu}\frac{k}{r^3}\sin z=\frac{1}{\mu}\frac{\varrho}{r^3}v\sin z \quad , \tag{31}$$

причемъ мы воспользовались соотношеніемъ (26*).

Прослѣдимъ, во-первыхъ, *какъ измѣняется* $z-q$, когда, *при постоянномъ* r, δ измѣняется въ первомъ квадрантѣ. Для этого напишемъ выраженіе (31) слѣдующимъ образомъ

$$\sin(z-q)=\frac{1}{r^3}\cdot\sin z\cdot\frac{k}{\mu}\quad. \tag{31*}$$

При $r=\text{const.}$ первый факторъ правой части, r^{-3}, постояненъ. Геометрически очевидно, что второй факторъ, $\sin z$, увеличивается, когда δ, находясь въ первомъ квадрантѣ, возрастаетъ: одновременно съ δ возрастаетъ и z. Изъ треугольника SRT, принимая во вниманіе теорему § 6 о геометрическомъ мѣстѣ R, видно, что 1) $\frac{k}{\mu}<1$ при $\delta<90^0$, 2) $\frac{dk}{d\delta}:\frac{d\mu}{d\delta}>1$ (т. к. перемѣщеніе точки R по кругу проектируется подъ меньшимъ угломъ на прямую TR, чѣмъ на прямую SR), т. е. $\frac{dk}{d\mu}>1$, 3) $\frac{d\mu}{d\delta}>0$. Имѣемъ:

$$\frac{d}{d\delta}\frac{k}{\mu}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{dk}{d\mu}-\frac{k}{\mu}\right)\frac{d\mu}{d\delta}\quad.$$

Это выраженіе положительно, т. е. и третій факторъ $\sin(z-q)$ возрастаетъ вмѣстѣ съ δ, и мы можемъ заключить: $\sin(z-q)$ возрастаетъ, при $r=\text{const.}$, отъ минимума при $\delta=0^0$ къ наибольшему значенію — въ области (28,29) — при $\delta=63^0 26'$.

Прослѣдимъ, во-вторыхъ, *измѣненіе* $\sin(z-q)$ *при заданномъ* $\delta\leqslant 63^0 26'$. Беремъ выраженіе для $\sin(z-q)$ въ видѣ

$$\sin(z-q)=v\,.\sin z\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\varrho}{r^3}\quad; \tag{31}$$

за независимую перемѣнную принимаемъ ϱ. При δ находящемся въ первомъ квадрантѣ $\frac{dr}{d\varrho}>0$, и поэтому $\frac{dv}{d\varrho}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{d\varrho}$ отрицательно. Также $\frac{d\sin z}{d\varrho}=\cos z\frac{dz}{dr}\frac{dr}{d\varrho}<0$. — Нѣсколько труднѣе опредѣлить знакъ $\frac{d\mu}{d\varrho}$.

Дифференцируя равенство $k=\varrho v$, получаемъ $\frac{dk}{d\varrho}=v+\varrho\frac{dv}{dr}\frac{dr}{d\varrho}$; но $\frac{dv}{dr}=-\frac{3r^2}{(r^3-1)^2}=-\frac{3v}{r(r^3-1)}$, и поэтому $\frac{dk}{d\varrho}=v\left(1-\frac{\varrho}{r}\frac{3}{r^3-1}\frac{dr}{d\varrho}\right)>v\left(1-\frac{\varrho}{r}\frac{3}{r^3-1}\right)$. Такъ какъ $\varrho<r$, то послѣднее выраженіе положительно при $r^3>4$, т.-е. при $r>1.59$. Но при $r\leqslant 1.59$ имѣемъ въ нашей области $\varrho:r<0.55$ (какъ легко вычислить, пользуясь геометрическими соображеніями) и выраженіе $1-\frac{1.65}{r^3-1}$ остается положительнымъ при $r\geqslant 1.5$. Отсюда заключаемъ, что, при возрастаніи ϱ, k увеличивается, т.-е. точка R удаляется отъ T, и поэтому возрастаетъ и $\overline{SR}=\mu$; слѣдовательно $\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{\mu}<0$.

Какъ измѣняется $\varrho:r^3$?

Имѣемъ $\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho}{r^3}=\frac{1}{r^4}\left(r-3\varrho\frac{dr}{d\varrho}\right)$. При перемѣщеніи по прямой $TP\ldots\frac{dr}{d\varrho}=\cos z$.

Поэтому $\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho}{r^3}=\frac{1}{r^4}(r-3\varrho\cos z)$. Но изъ треугольника STP находимъ проектированіемъ его сторонъ на направленіе $SP\ldots r=\cos(\delta-z)+\varrho\cos z$; принимая во вниманіе это равенство, получаемъ $\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho}{r^3}=\frac{1}{r^4}\Big(-2r+3\cos(\delta-z)\Big)$, то-есть $\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho}{r^3}<0$ при $r\geqslant 1.5$.

Видимъ, что в с ѣ ф а к т о р ы в ы р а ж е н і я (31) у б ы в а ю т ъ с ъ в о з р а с т а н і е м ъ ϱ.

Сопоставляя результаты изслѣдованія $\sin(z-q)$ при постоянномъ r, и при постоянномъ δ, заключаемъ, что въ области (28, 29) максимумъ $\sin(z-q)$ приходится на

$$r=1.5 \qquad \delta=63^0 26'\quad.$$

Произведя вычисленія, получаемъ для этихъ значеній r и δ

$$(z-q)_{\max.}=6^0\!.2\quad. \tag{32}$$

§ 8. Весьма приближенное значеніе корня Лагранжева уравненія (21) 8-ой степени можетъ быть получено изъ уравненій 4-ой степени, разнаго вида. Пользуясь доказанной въ § 7 малостью угла $z—q$, мы дадимъ здѣсь геометрическое истолкованіе этого факта, открытаго Steinbrink'омъ [14], и еще недавно независимо замѣченнаго А. Я. Орловымъ [15]. Мы получимъ при этомъ разныя преобразованія уравненія Гаусса.

1. Разсматриваемъ опять нашъ основной треугольникъ SPR (черт. 1). Проектируя его стороны на направленіе RT, получаемъ:

$$r\cos z + \frac{l}{r^3} = \mu\cos q \quad . \tag{33}$$

Полагая въ этомъ уравненіи, въ первомъ приближеніи, $\cos z = \cos q$, мы и получаемъ уравненіе 4-ой степени относительно r. — Удобнѣе перейти къ Гауссовой неизвѣстной z.

Раздѣляя обѣ стороны (33) на $r\cos z$ и принимая во вниманіе, что, согласно (18, 22):

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\sin z}{\sin q} \quad , \tag{34}$$

получаемъ сначала

$$1 + \frac{\sin^4 z}{\sin^4 q}\frac{l}{\mu^4\cos z} = \frac{\sin z\cos q}{\sin q\cos z} \quad .$$

Полагая же

$$\frac{\sin z\cos q}{\sin q\cos z} = F \qquad \frac{l}{\mu^4}\frac{\cos^3 z}{\cos^4 q} = \tau \qquad \frac{l}{\mu^4}\frac{1}{\cos^4 q} = \tau_1$$

получаемъ систему

$$\tau_1 = \frac{l}{\mu^4}\frac{1}{\cos^4 q} \qquad \tau = \tau_1\cos^3 z \qquad F - \tau F^4 = 1 \qquad \operatorname{tg} z = F\operatorname{tg} q \tag{G_1}$$

легко рѣшаемую помощью итераціоннаго процесса, если составлена таблица функціи F по аргументу τ.

Примѣчаніе. Вводя въ (33) вмѣсто z неизвѣстную y по уравненію $\sin z = y : \sqrt[3]{m}$, и пользуясь (34) и (15,16), мы легко получаемъ $y - y^4 = a$, гдѣ $a = \sqrt[3]{m}\,[\sin z - \sin(z—q)]$. Въ первомъ приближеніи $a = \sqrt[3]{m}\sin q$. Это преобразованіе и указано было А. Я. Орловымъ; лишь a мы написали въ нѣсколько измѣненномъ видѣ. Въ логариѳмической формѣ: $a = \sqrt[3]{m}\sin q\cos(z - \tfrac{1}{2}q)\sec\tfrac{1}{2}q$.

2. Бо́льшую точность перваго приближенія даетъ проектированіе сторонъ треугольника SPR на направленіе SR, такъ какъ тогда въ первомъ приближеніи приходится принять $\cos(z—q) = 1$, что вѣрнѣе, чѣмъ $\cos z = \cos q$.

Отъ проектированія получаемъ

$$r\cos(z—q) + \frac{l}{r^3}\cos q = \mu \quad . \tag{35}$$

Раздѣляя обѣ части на r, и обозначая $t_1 = \frac{l}{\mu^4}\cos q$, $f = (\mu : r) = \sin z : \sin q$, находимъ:

$$f - f^4 t_1 = \cos(z—q) \tag{35*}$$

откуда, обозначая $\tau = t_1\cos^3(z—q)$, $F = f : \cos(z—q)$, получаемъ совокупность формулъ

$$t_1 = \frac{l}{\mu^4}\cos q \qquad \tau = t_1\cos^3(z—q) \qquad F - \tau F^4 = 1 \qquad \sin z = F\,.\sin q\,.\cos(z—q) \quad . \tag{G_2}$$

Въ первомъ приближеніи можно положить $z=q$ въ правыхъ сторонахъ второго и четвертаго уравненія, которыя легко рѣшаются итераціей, если даны таблицы функціи F; понятно, что итерація здѣсь сходится быстрѣе, чѣмъ въ (G_1), потому что $\cos(z-q)$ измѣняется меньше, чѣмъ $\cos z$. Для усиленія сходимости приводимъ послѣднее уравненіе (G_2) къ другому виду, послѣ чего имѣемъ:

$$t_1=\frac{l}{\mu^4}\cos q \qquad \tau=t_1\cos^3(z-q) \qquad F-\tau F^4=1 \qquad \operatorname{tg} z=F\frac{\sin q\cos q}{1-F\sin^2 q} \quad . \qquad (G_2')$$

Подставляя въ выраженіе t_1 значеніе μ^3 по первому изъ уравненій (15), и обращаясь къ опредѣленію (16) параметра m, находимъ $t_1=\frac{l}{\mu^4}\cos q=m\sin^3 q\cos q$, т. е. введенная нами здѣсь величина t_1 тождественна съ величиной § 4.

3. Исходимъ изъ уравненія (35*). Опредѣляемъ нѣкоторый параметръ τ' такъ, чтобы

$$f-f^4\tau'=1 \quad . \qquad (35^{**})$$

Вычитая это равенство изъ (35*), найдемъ

$$\tau'-t_1=\frac{\cos(z-q)-1}{f^4}=-\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(z-q)}{f^4} \quad .$$

Для опредѣленія z послѣдовательными приближеніями получается совокупность формулъ

$$t_1=\frac{l}{\mu^4}\cos q \qquad \tau'=t_1-\frac{2}{f^4}\sin^2\tfrac{1}{2}(z-q) \qquad f-f^4\tau'=1 \qquad \sin z=f.\sin q \quad . \qquad (G_3)$$

Это преобразованіе было уже указано [16]; l. c. для τ' дано другое равнозначное выраженіе, а именно

$$\tau'=m\sin^3 q\cos\tfrac{1}{2}(z+q)\sec\tfrac{1}{2}(z-q) \quad .$$

4. Можно достигнуть большей сходимости, если послѣ опредѣленія f, какъ въ 3-емъ преобразованіи, искать прямо малый уголъ $z-q$, вмѣсто z. — Теорема синусовъ въ примѣненіи къ треугольнику SPR даетъ

$$\sin(z-q):\sin q=\frac{l}{r^3}:r \qquad \text{т. е.}\quad \sin(z-q)=\left(\frac{\mu}{r}\right)^4\frac{l}{\mu^4}\sin q=f^4 t_1\operatorname{tg} q \quad .$$

Такимъ образомъ

$$t_1=\frac{l}{\mu^4}\cos q \qquad \tau'=t_1-\frac{2}{f^4}\sin^2\tfrac{1}{2}(z-q) \qquad f-f^4\tau'=1 \qquad \sin(z-q)=(t_1\operatorname{tg} q).f^4 \qquad (G_4)$$

(причемъ $t_1\operatorname{tg} q=m\sin^4 q$).

Это преобразованіе дается впервые здѣсь.

5. Раздѣляя обѣ стороны послѣдняго уравненія группы (G_4) на $\cos(z-q)$, имѣемъ

$$\operatorname{tg}(z-q)=\left(\frac{f}{\cos(z-q)}\right)^4.t_1\operatorname{tg} q\cos^3(z-q) \quad .$$

Выше мы получили формулы (G_2) для постепеннаго вычисленія $F=f:\cos(z-q)$; примѣняя ихъ, найдемъ систему:

$$t_1=\frac{l}{\mu^4}\cos q \qquad \tau=t_1\cos^3(z-q) \qquad F-\tau F^4=1 \qquad \operatorname{tg}(z-q)=F^4.\tau.\operatorname{tg} q \quad . \qquad (G_5)$$

Это замѣчательное преобразованіе принадлежитъ Steinbrink'у [14].

Мы не будемъ изслѣдовать сходимости итерацій въ написанныхъ преобразованіяхъ: рѣшеніе, предлагаемое нами, основывается не на томъ или иномъ преобразованіи, но на разложеніи въ рядъ, которое можетъ быть одинаково получено изъ любого изъ нихъ.

§ 9. Мы можемъ теперь разрѣшить задачу § 4 о предѣлахъ измѣненій t_1. Разсмотримъ для этого сначала функцію $f=\mu:r$.

При всякомъ заданномъ r, f возрастаетъ вмѣстѣ съ δ: возрастаніе величины μ прямо вытекаетъ геометрически изъ теоремы § 6. *Какъ измѣняется $\mu:r$ при заданномъ δ?*

Имѣемъ

$$\frac{df}{dr}=\frac{d}{dr}\frac{\mu}{r}=\frac{1}{r}\left(\frac{d\mu}{dr}-f\right) \quad . \tag{36}$$

Нетрудно показать геометрически, что, въ области (28, 29), $\frac{d\mu}{dr}<\frac{\cos q}{\cos z}$. Въ самомъ дѣлѣ — см. черт. 1 и форм. (23) —

$$\overline{PR}=l:r^3=\lambda^3R^3(k:r^3) \quad .$$

Принимая $\lambda=R=1$ (см. форм. (26*, 25))

$$\overline{PR}=k:r^3=\frac{\varrho}{r^3}\cdot v \quad .$$

Имѣемъ, при постоянномъ δ:

$$\frac{d}{d\varrho}\frac{\varrho_1}{r^3}<0, \text{ какъ показано въ § 7 .}$$

$$\frac{d}{dr}v<0, \text{ такъ какъ } v=r^3:(r^3-1) \quad .$$

Поэтому длина отрѣзка $\overline{PR}$ *уменьшается* при увеличеніи r, и неизмѣнномъ δ, то-есть $d\overline{PR}:dr<0$, и такъ какъ, согласно чертежу:

$$d\overline{PR}=d\mu\,.\sec q-dr\,.\sec z \ ,$$

то $\frac{d\mu}{dr}\cos z-\cos q<0$, т. е. $\frac{d\mu}{dr}<\frac{\cos q}{\cos z}$, ч. и т. д.

Но, съ другой стороны, $f=\sin z:\sin q$, и поэтому выраженіе въ скобкахъ въ правой части формулы (36) отрицательно, когда $z<45^0$ (въ нашей области $z<37^0$); то-есть

$$\frac{df}{dr}<0, \quad \text{при } r\geqslant 1.5, \quad \delta\leqslant 63^0 26'. \tag{37}$$

Изъ всего предыдущаго можемъ вывести заключеніе, аналогично полученному выше для величины $z-q$, а именно: въ области $5.5\geqslant r\geqslant 1.5$, $\delta\leqslant 63^0 26'$, величина f имѣетъ *maximum* при $r=1.5$, $\delta=63^0 26'$, и *minimum* при $r=5.5$, $\delta=0^0$.

Вычисленіемъ находимъ:

при	$r=1.5$	$\delta=63^0 26'$	....	$\log f_{\max.}=0.0709$;
„	$r=5.5$	$\delta=0^0$	....	$\log f_{\min.}=0.0021$.

Такъ какъ при f, заключенномъ между этими предѣлами, $d\tau':df>0$, то соотвѣтственныя значенія τ' по уравненію (35**), $f-f^4\tau'=1$, суть экстремальныя, и имѣемъ:

$$\begin{aligned}\log\tau'_{\max.}&=8.965-10\\ \log\tau'_{\min.}&=7.688-10 \quad .\end{aligned} \tag{38}$$

Но величина τ' весьма близка къ t_1; имѣемъ именно:

$$t_1 : \tau' = m\sin^3 q\cos q : m\sin^3 q\cos\tfrac{1}{2}(z+q)\sec\tfrac{1}{2}(z-q)$$

или

$$t_1 : \tau' = \cos q\cos\tfrac{1}{2}(z-q)\sec(q+\tfrac{1}{2}(z-q)) \quad . \tag{39}$$

Изъ геометрическаго значенія для q, ясно, въ виду теоремы § 6, что *maximum* q въ разсматриваемой области долженъ получиться при R расположенномъ на граничной прямой: $\delta = 63^0 26'$. Но въ § 7 было доказано, что, при перемѣщеніи P по прямой $\delta = \text{const.}$, $d\mu : d\varrho > 0$. Такъ какъ наибольшее значеніе q на прямой $\delta = 63^0 26'$ получается при наименьшемъ μ, и, слѣдовательно, наименьшихъ ϱ и r, то *maximum* q въ области (28, 29) соотвѣтствуетъ значеніямъ: $r = 1.5$, $\delta = 63^0 26'$. Вычисленіемъ находимъ $q_{\max.} = 30^0 26'$, максимумъ же $(z-q)$ есть $6\overset{0}{.}2$, согласно § 7. Принимая это во вниманіе, легко находимъ, логариѳмируя (39), что $|\log(t_1 : \tau')| < 0.015$.

Обращаясь къ равенствамъ (38), заключаемъ: въ области $5.5 \geqslant r \geqslant 1.5$, $\delta \leqslant 63^0 26'$, вспомогательный параметръ t_1 удовлетворяетъ неравенству

$$8.980 - 10 > \log t_1 > 7.673 - 10 \quad . \tag{40}$$

§ 10. Въ виду исключительнаго значенія, какое имѣетъ въ дальнѣйшемъ преобразованіе (G_4) § 8, мы выведемъ его здѣсь вторично чисто аналитически.

Замѣчаемъ тождество

$$\sin(z-q) = [\sin z - \sin q]\cos\tfrac{1}{2}(z-q)\sec\tfrac{1}{2}(z+q) \quad ,$$

позволяющее Гауссово уравненіе (1) написать въ видѣ:

$$\sin z - \sin q = \sec\tfrac{1}{2}(z-q)\cos\tfrac{1}{2}(z+q)\,.\,m\sin^4 z \quad . \tag{1*}$$

Полагая здѣсь, какъ раньше

$$\sin z = f\,.\,\sin q \qquad\qquad \tau' = m\sin^3 q\sec\tfrac{1}{2}(z-q)\cos\tfrac{1}{2}(z+q) \quad ,$$

получаемъ связь между f и τ' въ видѣ

$$f - \tau' f^4 = 1 \quad .$$

Но, согласно уравненію Гаусса, $\sin(z-q) = m\sin^4 q\,.\,\frac{\sin^4 z}{\sin^4 q}$, поэтому

$$\sin(z-q) = (m\sin^4 q)\,.\,f^4 \quad . \tag{41}$$

Для аналитическаго вывода преобразованія Штейнбринка (G_5), полагаемъ въ уравненіи (1) $z-q=y$:

$$\sin y = m\sin^4(q+y) = m(\sin q\cos y + \cos q\sin y)^4 = m\sin^4 q\cos^4 y(1+\operatorname{ctg} q\operatorname{tg} y)^4 \quad . \tag{1**}$$

Принимая

$$\tau = m\sin^4 q\operatorname{ctg} q\cos^3 y \qquad\qquad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} q\,.\,\varphi\,.\,\tau \tag{42}$$

гдѣ φ есть нѣкоторая функція τ, получаемъ для ея опредѣленія

$$\varphi = (1+\varphi\tau)^4 \quad , \tag{43}$$

причемъ, въ виду уравненія $F - \tau F^4 = 1$:

$$\varphi = F^4 \quad . \tag{44}$$

§ 11. Среди разныхъ преобразованій (§ 8) Гауссова уравненія особаго вниманія съ практической точки зрѣнія заслуживаютъ тѣ, (G_4) и (G_5), въ которыхъ рѣшеніе приводится къ опредѣленію *sin* и *tg* *малаго* угла $z-q$. Неизбѣжная погрѣшность въ q — функціи наблюденныхъ величинъ — всецѣло входитъ въ опредѣленное изъ уравненія Гаусса z; поэтому, при нахожденіи малой — по сравненію съ q — величины $z-q$, вполнѣ раціонально довольствоваться меньшей *относительной* точностью, чѣмъ точность, съ которой извѣстно q. Замѣчаніе это позволяетъ вычислять $\log\frac{\sin}{\mathrm{tg}}(z-q)$ съ числомъ знаковъ, меньшимъ того, съ какимъ ведется опредѣленіе орбиты. Въ самомъ дѣлѣ, разберемъ, *съ какимъ факторомъ*, ε, *входитъ въ* $\log\sin z$ *ошибка* $\delta\log\sin(z-q)$. Предполагаемъ при этомъ, что z по $\sin(z-q)$ и опредѣляется.

Имѣемъ

$$\delta\log\sin z=\frac{M}{\mathrm{tg}\,z}\,\delta z, \qquad \text{и} \qquad \delta\log\sin(z-q)=\frac{M}{\mathrm{tg}\,(z-q)}\,\delta z$$

(M .... модуль логариѳмовъ)

отсюда, исключая δz:

$$\delta\log\sin z=\varepsilon\,.\,\delta\log\sin(z-q) \qquad (45) \qquad \varepsilon=\frac{\mathrm{tg}\,(z-q)}{\mathrm{tg}\,z}\,. \qquad (45^*)$$

Такъ какъ, тождественно

$$\mathrm{tg}\,z=\mathrm{tg}\,[q+(z-q)]=\frac{\mathrm{tg}\,q+\mathrm{tg}\,(z-q)}{1-\mathrm{tg}\,q\,\mathrm{tg}\,(z-q)}, \text{ то}$$

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{tg}\,(z-q)}{\mathrm{tg}\,q+\mathrm{tg}\,(z-q)}[1-\mathrm{tg}\,q\,\mathrm{tg}\,(z-q)], \text{ и, въ предѣлахъ (28, 29):}$$

$$\varepsilon<\frac{\mathrm{tg}\,(z-q)}{\mathrm{tg}\,q+\mathrm{tg}\,(z-q)}\,.$$

Но, согласно (42), $\mathrm{tg}\,(z-q)=\mathrm{tg}\,q\,.\,\varphi\,.\,\tau$, и поэтому

$$\varepsilon<\frac{\varphi\,.\,\tau}{1+\varphi\tau}=\frac{\varphi\,.\,\tau}{\varphi^{1/4}}=\varphi^{3/4}\tau\,.$$

Такимъ образомъ, по (45):

$$|\,\delta\log\sin z\,|<(\varphi^{3/4}\,.\,\tau)\,|\,\delta\log\sin(z-q)\,|\,.$$

Если же обозначимъ черезъ φ_1 значеніе функціи φ, соотвѣтствующее $\tau=t_1$, то въ виду $t_1>\tau$, $\varphi_1>\varphi$, можемъ a fortiori написать:

$$\varepsilon<\varphi_1^{3/4}t_1 \qquad |\,\delta\log\sin z\,|<\varphi_1^{3/4}t_1\,|\,\delta\log\sin(z-q)\,|\,. \qquad (46)$$

Факторъ $\varphi_1^{3/4}t_1$ имѣетъ слѣдующія значенія

$\log t_1$	$=7.60$	8.00	8.40	8.80	8.90
$\log t_1\,\varphi_1^{3/4}$	$=7.6052$	8.0135	8.4370	8.9106	9.0582
$t_1\,\varphi_1^{3/4}$	$=1/_{249}$	$1/_{97}$	$1/_{37}$	$1/_{12}$	$1/_{8\cdot 7}$.

Малость фактора $t_1\varphi_1^{3/4}$ обусловливаетъ собой возможность раціональнаго сокращенія числа знаковъ — на одинъ или два — при нахожденіи $\sin(z-q)$ и $\mathrm{tg}\,(z-q)$.

§ 12. Хотя выведенныя выше (§ 8) преобразованія Гауссова уравненія и даютъ быстро сходящіяся послѣдовательныя приближенія, но все же они оставляютъ неприкосновеннымъ самый методъ, лишь терпимый вычислителями, какъ malum necessarium.

Мы перейдемъ теперь къ изложенію прямого рѣшенія помощью быстро сходящихся безконечныхъ рядовъ. Главная теоретическая трудность задачи состоитъ лишь въ ясной ея постановкѣ и въ надлежащемъ выборѣ независимой перемѣнной.

Вводимъ въ качествѣ новой неизвѣстной величину

$$x = \varphi \tau \quad . \tag{47}$$

Если удастся опредѣлить x, то этимъ самимъ будетъ найдено и $z-q$, такъ какъ согласно (42),

$$\operatorname{tg}(z-q) = x \operatorname{tg} q \quad . \tag{48}$$

Уравненіе (43) можетъ быть написано $x : \tau = (1+x)^4$, то-есть

$$\frac{x}{(1+x)^4} = \tau \tag{49}$$

причемъ, согласно (42):

$$\tau = t_1 \cos^3(z-q) = \frac{t_1}{(1+\operatorname{tg}^2(z-q))^{3/2}} = \frac{t_1}{(1+x^2 \operatorname{tg}^2 q)^{3/2}} \quad , \tag{50}$$

такъ что уравненіе (49) даетъ

$$\frac{x}{(1+x)^4} = \frac{t_1}{(1+x^2 \operatorname{tg}^2 q)^{3/2}} \quad . \tag{51}$$

Будемъ считать въ дальнѣйшемъ t_1 заданнымъ параметромъ. Тогда x, по уравненію (51), можно разсматривать какъ функцію $\operatorname{tg}^2 q$, зависящую отъ t_1. Мы будемъ искать разложенія x по степенямъ $\operatorname{tg}^2 q$; съ этой цѣлью мы постараемся привести уравненіе (51) къ такому типу, для котораго имѣется готовое рѣшеніе.

Такъ какъ $\operatorname{tg}^2 q$ входитъ въ (51) въ линейной комбинаціи, то нетрудно получить изъ (51) уравненіе, разрѣшаемое знаменитой строкой Лагранжа.

Пусть дано уравненіе относительно x

$$x - x_1 - \alpha f(x) = 0 \tag{52}$$

гдѣ x_1 и α будемъ считать дѣйствительными числами; пусть функція $f(x)$ голоморфна въ нѣкоторой области D, содержащей точку x_1. Обозначимъ черезъ C окружность круга, находящагося въ области D, съ центромъ въ точкѣ x_1, и пусть для всѣхъ точекъ x этой окружности

$$\operatorname{mod} \frac{\alpha f(x)}{x - x_1} < 1 \quad . \tag{53}$$

Уравненіе (52) допускаетъ тогда внутри C одинъ и только одинъ корень; обозначивъ черезъ $\Pi(x)$ произвольную голоморфную, внутри C, функцію этого корня, имѣемъ *сходящійся* рядъ Лагранжа:

$$\Pi(x) = \Pi(x_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dx_1{}^n} \left[\Pi'(x_1) f^{n+1}(x_1)\right] \quad . \tag{54}$$

Если въ разложеніи (54) ограничиться членами до α^k включительно, такъ что

$$\Pi(x) = \Pi(x_1) + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dx_1{}^n} \left[\Pi'(x_1) f^{n+1}(x_1)\right] + R_{k+1} \quad , \tag{55}$$

то остаточный членъ R_{k+1}, найденный Cauchy, можетъ быть написанъ въ видѣ

$$R_{k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \Pi(x) \frac{1 - \alpha f'(x_1)}{x - x_1 - \alpha f(x)} \left[\frac{\alpha f(x)}{x - x_1}\right]^{k+1} dx \quad , \tag{56}$$

гдѣ интегралъ берется по вышеопредѣленной окружности C; $i = \sqrt{-1}$.

Обозначаемъ, для сокращенія письма

$$a = \mathrm{tg}^2 q \quad . \tag{57}$$

Уравненіе (51) непосредственно приводится къ виду

$$1 - a\frac{x^2}{t_1^{2/3}(1+x)^{8/3}x^{-2/3} - 1} = 0 \quad . \tag{58}$$

Обозначимъ черезъ x_1 *наименьшее* значеніе x, изъ уравненія (51), при $a=0$; пусть φ_1 есть *наименьшее* значеніе φ, соотвѣтствующее, по (43), $\tau = t_1$, такъ что

$$x_1 = \varphi_1 . t_1 \tag{59}$$

$$\frac{x_1}{(1+x_1)^4} = t_1 \quad . \tag{60}$$

Умножаемъ уравненіе (58) на $x - x_1$, и подставляемъ въ него значеніе t_1 изъ (60); получимъ:

$$\underline{x - x_1 - a\,f(x) = 0} \quad , \tag{52*}$$

гдѣ обозначено

$$\underline{f(x) = \frac{x^2}{\mathfrak{z}}} \qquad\qquad \underline{\mathfrak{z} = \left\{\left(\frac{1+x}{1+x_1}\right)^{8/3}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{-2/3} - 1\right\} : (x - x_1)} \quad . \tag{61}$$

Знаменатель $\mathfrak{z}$ при $x = x_1$ принимаетъ видъ $0:0$; условимся считать $(\mathfrak{z})_{x=x_1} = \mathrm{Lim.}_{x=x_1}\,\mathfrak{z}$. Функція $f(x)$ можетъ считаться тогда регулярной въ области точки x_1 и примѣненіе формулъ (54. 55, 56) вполнѣ законно. Однако формальная неопредѣленность $f(x_1)$, происходящая отъ неизбѣжной искусственности въ сведеніи нашей задачи къ проблемѣ Лагранжа, обусловливаетъ собой практическія неудобства при нахожденіи и изслѣдованіи значеній производныхъ $f(x)$ въ области точки x_1.

§ 13. Мы принимаемъ здѣсь и во всемъ дальнѣйшемъ изслѣдованіи безконечныхъ рядовъ

$$z - q \leqslant 2^0 \quad , \qquad\qquad \log t_1 \leqslant 8.900 - 10 \quad . \tag{62}$$

Изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ

$$x_1 < 0.129\,102 \quad . \tag{63}$$

Изслѣдуемъ, при этихъ условіяхъ, остаточный членъ R_{n+1} и докажемъ сходимость ряда (54) для нашего уравненія (52*).

Опишемъ изъ точки x_1 кругъ C радіусомъ $r = cx_1$ ($c < 1$), настолько малымъ, что внутри и на окружности C знаменатель $\mathfrak{z}$ ни разу не обращается въ нуль. Внутри и на окружности C $\mathfrak{z}$ будетъ голоморфной функціей x, и, слѣдовательно, $f(x) = x^2 : \mathfrak{z}$ будетъ тамъ же голоморфна. Поэтому $f(x)$ допускаетъ на C верхній предѣлъ, и при *достаточно малыхъ* a будетъ на всей окружности выполняться условіе (53): $|af(x)| < r$, т. е. рядъ (54) будетъ сходящимся. Намъ однако необходимо доказать не сходимость при *достаточно малыхъ* a, но при всѣхъ значеніяхъ этого параметра, для которыхъ выполнены условія (62).

Обращаемся къ выраженію (56) остаточнаго члена R_{n+1}. Обозначая черезъ Π максимумъ модуля выраженія $\Pi(x)\,[1 - af'(x_1)]$ на окружности C, черезъ m *верхній* предѣлъ модуля $af(x)$ на той же окружности, можемъ написать, полагая $K=m:r$, и считая $r>m$

$$\left|R_{n+1}\right|<K^{n+1}\frac{r\Pi}{r-m}\quad . \tag{64}$$

Обозначая черезъ m_1 *верхній* предѣлъ модуля ax^2, черезъ m_2 *нижній* предѣлъ модуля $\mathfrak{z}$ — оба на окружности C — имѣемъ

$$m<\frac{m_1}{m_2}\quad . \tag{65}$$

Первый предѣлъ, m_1, опредѣляется сразу же; такъ какъ модуль x^2 тѣмъ больше, чѣмъ больше модуль x'а, то наибольшее значеніе модуля ax^2 на окружности C получится при $x=x_1+r$ и поэтому

$$m_1=a(x_1+r)^2=a\,x_1^2(1+c)^2\quad . \tag{66}$$

Займемся опредѣленіемъ m_2, нижняго предѣла модуля $\mathfrak{z}$ (61) — задачей, разрѣшенной нами далеко не такъ просто.

Такъ какъ модуль $x-x_1$ одинаковъ на окружности C (и равенъ r), то достаточно будетъ вмѣсто $\mathfrak{z}$ разсматривать функцію $\bar{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}(x-x_1)$

$$\bar{\mathfrak{z}}=\left(\frac{1+x}{1+x_1}\right)^{8/3}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{-2/3}-1=t_1^{2/3}(1+x)^{8/3}x^{-2/3}-1\quad . \tag{67}$$

Обозначимъ черезъ $\bar{\mathfrak{z}}_c$ значеніе $\bar{\mathfrak{z}}$ для нѣкоторой точки M *на* окружности C, черезъ R любую кривую, ведущую отъ точки x_1 къ M. Разсмотримъ $\int\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}dx$ вдоль кривой R; онъ равенъ разности значеній $\bar{\mathfrak{z}}$ для предѣльныхъ точекъ M и x_1. Такъ какъ, для $x=x_1$, $\bar{\mathfrak{z}}$ равно нулю, то имѣемъ

$$\bar{\mathfrak{z}}_c=\int\limits_{(R)}\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}\,dx\quad . \tag{68}$$

Въ качествѣ произвольной кривой R возьмемъ радіусъ векторъ, соединяющій M съ x_1. Вдоль него будетъ

$$dx=d\varrho\,(\cos\omega+i\sin\omega)$$

гдѣ черезъ ϱ и ω обозначены полярныя координаты точки M относительно x_1. Подставляя это значеніе dx въ (68), получимъ

$$\bar{\mathfrak{z}}_c=(\cos\omega+i\sin\omega)\int\limits_0^r\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}\,d\varrho\quad ,$$

откуда

$$\operatorname{mod}\bar{\mathfrak{z}}_c=\operatorname{mod}\int\limits_0^r\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}\,d\varrho\quad , \tag{69}$$

такъ какъ $\operatorname{mod}(\cos\omega+i\sin\omega)=1$. Если обозначимъ черезъ $u(\varrho)$ дѣйствительную и черезъ $iv(\varrho)$ мнимую часть производной $\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}$, такъ что $\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}=u(\varrho)+iv(\varrho)$, то, согласно (69)

$$\operatorname{mod}\bar{\mathfrak{z}}_c=\operatorname{mod}\left[\int\limits_0^r u(\varrho)\,d\varrho+i\int\limits_0^r v(\varrho)\,d\varrho\right]\quad ,$$

и поэтому

$$\operatorname{mod}\bar{\mathfrak{z}}_c\geqslant\operatorname{mod}\int\limits_0^r u(\varrho)\,d\varrho\quad .$$

Назовемъ черезъ a нижній предѣлъ абсолютнаго значенія $u(\varrho)$; согласно только что полученному неравенству

$$\operatorname{mod} \bar{\mathfrak{z}}_0 \geqslant r \,.\, a \tag{70}$$

и поэтому за m_2, нижній предѣлъ модуля функціи $\mathfrak{z} = \bar{\mathfrak{z}} : (x - x_1)$, можно принять

$$m_2 = a \quad . \tag{71}$$

Вопросъ сводится такимъ образомъ къ опредѣленію a, т.-е. ***нижняго** предѣла абсолютнаго значенія дѣйствительной части* $\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}$ внутри круга C и на его окружности.

Дифференцируя (67) получаемъ:

$$-\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx} = +\frac{2}{3} t_1^{2/3} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{5/3} (1 - 3x) \quad . \tag{72}$$

Найдемъ: — 1) нижній предѣлъ *модуля* $\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}$, обозначая этотъ предѣлъ черезъ m_3; — 2) верхній предѣлъ Ω абсолютнаго значенія *амплитуды* $-\frac{d\bar{\mathfrak{z}}}{dx}$. Оба эти предѣла ищутся внутри и на окружности C; если окажется, что $\Omega < \pi/2$, то можно будетъ за a принять

$$a = m_3 \cos \Omega \quad . \tag{73}$$

1). Что касается m_3, то очевидно имѣемъ

$$m_3 \geqslant \frac{2}{3} t_1^{2/3} \left(\frac{1 + x_1 - r}{x_1 + r}\right)^{5/3} [1 - 3(x_1 + r)] \quad .$$

Полагая $r = c x_1$, $(c < 1)$, переписываемъ это неравенство въ видѣ

$$m_3 \geqslant \frac{2}{3} \frac{t_1^{2/3}}{x_1^{5/3}} \left(\frac{1 + (1 - c) x_1}{1 + c}\right)^{5/3} [1 - 3(1 + c) x_1] \quad , \text{ или}$$

$$m_3 \geqslant \frac{2}{3} (1 + c)^{-5/3} (1 + x_1)^{-8/3} x_1^{-1} [1 + (1 - c) x_1]^{5/3} [1 - 3(1 + c) x_1] \quad . \tag{74}$$

2ª). Разыщемъ сначала максимумъ амплитуды $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{5/3}$.

Назовемъ черезъ ϱ, ω полярныя координаты точки M, расположенной *внутри* или *на* окружности C $(\varrho \leqslant r)$. Тогда будетъ $x - x_1 = \varrho \cos \omega + i \varrho \sin \omega$, то-есть

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + \varrho \cos \omega) + i \varrho \sin \omega \\ 1 + x &= (1 + x_1 + \varrho \cos \omega) + i \varrho \sin \omega \quad . \end{aligned} \tag{75}$$

Назовемъ черезъ φ_2 и φ_1 амплитуды x и $1 + x$. Согласно (75), онѣ опредѣляются изъ уравненій

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\varrho \sin \omega}{x_1 + \varrho \cos \omega} \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\varrho \sin \omega}{1 + x_1 + \varrho \cos \omega} \quad .$$

Амплитуда выраженія $\frac{1+x}{x}$ равняется разности $\varphi_1 - \varphi_2$. Положимъ $\varrho = c_1 x_1$ $(c_1 x_1 \leqslant c x_1)$ и опредѣлимъ $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{\frac{c_1 x_1 \sin \omega}{x_1 + c_1 x_1 \cos \omega} - \frac{c_1 x_1 \sin \omega}{1 + x_1 + c_1 x_1 \cos \omega}}{1 + \frac{c_1^2 x_1^2 \sin^2 \omega}{(x_1 + c_1 x_1 \cos \omega)(1 + x_1 + c_1 x_1 \cos \omega)}} = \frac{c_1 \sin \omega}{1 + (1 + c_1^2) x_1 + c_1 \cos \omega (1 + 2 x_1)} \tag{76}$$

Дифференцированіемъ по c_1 легко убѣдиться, что численное значеніе $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ увеличивается вмѣстѣ съ c_1; отыскивая максимальное значеніе $|\varphi_2-\varphi_1|$, мы можемъ поэтому ограничиться точками, расположенными на окружности C, для которыхъ $c_1x_1=cx_1=r$, и для которыхъ, слѣдовательно, $c_1=c$.

Вычислимъ, для какого ω, обозначаемаго $\omega_{\max.}$, абсолютное значеніе $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ достигаетъ максимума. Приравнивая нулю $\frac{d}{d\omega}\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$, получимъ уравненіе

$$[1+(1+c^2)x_1]\cos\omega_{\max.}+c(1+2x_1)=0 \quad . \tag{77}$$

Для значенія $\omega_{\max.}$, удовлетворяющаго (77), $\frac{d}{d\omega}\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ — когда $\omega_{\max.}$ лежитъ во 2-мъ квадрантѣ и, слѣдовательно, когда $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)>0$ — и отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ — когда $\omega_{\max.}$ находится въ 3-мъ квадрантѣ, и, слѣдовательно, когда $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)<0$. — Отсюда заключаемъ, что $\omega_{\max.}$ даетъ *максимумъ* $|\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)|$.

Полагая въ (76) $\omega_{\max.}$ вмѣсто ω, находимъ, умноживъ числителя и знаменателя на $\cos\omega_{\max.}$, и пользуясь уравненіемъ (77):

$$\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)_{\max.}=\frac{c\sin\omega_{\max.}\cos\omega_{\max.}}{-c(1+2x_1)\sin^2\omega_{\max.}}=-\frac{\cos\omega_{\max.}}{\sin\omega_{\max.}}\frac{1}{1+2x_1} \quad ,$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi_2-\varphi_1)_{\max.}=-\frac{\sin\omega_{\max.}}{\cos\omega_{\max.}}(1+2x_1) \quad , \text{ и отсюда}$$

$$\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)_{\max.}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\omega_{\max.}}{\cos^2\omega_{\max.}}(1+2x_1)^2} \quad , \text{ и, пользуясь (77):}$$

$$\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)_{\max.}=\frac{1}{1+\frac{[1+(1+c^2)x_1]^2-(1+2x_1)^2c^2}{c^2}}=\frac{c^2}{[1+(1-c^2)x_1]^2} \quad , \text{ то-есть}$$

$$\sin(\varphi_2-\varphi_1)_{\max.}=\pm\frac{c}{1+(1-c^2)x_1} \quad . \tag{78}$$

Такимъ уравненіемъ дается максимальная амплитуда $(1+x):x$. Поэтому:

$$\text{Максимумъ абс. знач. ампл. } \left(\frac{1+x}{x}\right)^{5/3}=\frac{5}{3}\arcsin\frac{c}{1+(1-c^2)x_1} \quad . \tag{79}$$

2⁶). Разыщемъ теперь максимумъ амплитуды $1-3x$ внутри и на окружности C. Обозначаемъ амплитуду $1-3x$ черезъ φ_3. Для всякой точки M, съ полярными координатами — относительно x_1 — ϱ, ω, имѣемъ

$$\operatorname{tg}\varphi_3=-\frac{3\varrho\sin\omega}{1-3x_1-3\varrho\cos\omega} \quad . \tag{80}$$

При постоянномъ ϱ, абсолютное значеніе $\operatorname{tg}\varphi_3$ достигаетъ максимума при $\cos\omega_{\max.}=\frac{3\varrho}{1-3x_1}$, какъ легко убѣдиться дифференцированіемъ. Отсюда $3\varrho=(1-3x_1)\cos\omega_{\max.}$, и, подставляя это значеніе въ (80), получимъ, для $\operatorname{tg}|\varphi_3|_{\max.}$:

$$\operatorname{tg}|\varphi_3|_{\max.}=\frac{(1-3x_1)\cos\omega_{\max.}\sin\omega_{\max.}}{1-3x_1-(1-3x_1)\cos^2\omega_{\max.}}=\frac{\cos\omega_{\max.}}{\sin\omega_{\max.}} \quad .$$

Отсюда $\sin|\varphi_3|_{\max.}=\cos\omega_{\max.}=\frac{3\varrho}{1-3x_1}$.

Выраженіе это пропорціонально ϱ и достигаетъ предѣльнаго значенія на окружности C, когда $\varrho = r = c x_1$; поэтому

$$|\varphi_3|_{\max.} = \arc \sin \frac{3 c x_1}{1 - 3 x_1} \quad . \tag{81}$$

Такъ какъ Ω, согласно опредѣленію, есть верхній предѣлъ амплитуды $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{5/3}(1-3x)$, то, сопоставляя результаты (79) и (81), имѣемъ

$$\Omega \leqslant \frac{5}{3} \arcsin \frac{c}{1+(1-c^2)x_1} + \arcsin \frac{3 c x_1}{1-3x_1} \tag{82}$$

и за a, см. (73), можно принять, — при условіи такого выбора c, что $\Omega < \pi/_2$ —

$$a \geqslant \frac{2}{3}(1+c)^{-5/3}(1+x_1)^{-8/3}x_1^{-1}[1+(1-c)x_1]^{5/3}[1-3(1+c)x_1]\cos\left\{\frac{5}{3}\arcsin\frac{c}{1+(1-c^2)x_1}+\arcsin\frac{3cx_1}{1-3x_1}\right\} \tag{83}$$

Имѣемъ дальше, изъ опредѣленія K, и неравенства (65)

$$K = \frac{m}{r} < \frac{m_1}{m_2 r} \quad ,$$

или, въ виду (66), и $r = c x_1$,

$$K < \frac{a x_1^2 (1+c)^2}{a c x_1}$$

и, принимая во вниманіе (83):

$$K < (a x_1^2) \frac{3}{2} \frac{(1+c)^{11/3}}{c} \left(\frac{1+x_1}{1+(1-c)x_1}\right)^{5/3} \frac{1+x_1}{[1-3(1+c)x_1]} \cdot \frac{1}{\cos\left\{\frac{5}{3}\arcsin\frac{c}{1+(1-c^2)x_1}+\arcsin\frac{3cx_1}{1-3x_1}\right\}} \tag{84}$$

Это неравенство не нарушится, если вмѣсто x_1 подставимъ въ него предѣльное значеніе этой величины, $x_1 = 0.129\,102$, потому что всѣ факторы правой его части при возрастаніи x_1 или остаются постоянными или возрастаютъ.

Утвержденіе это очевидно не сразу лишь для послѣдняго фактора. Обозначимъ

$$\varphi = \frac{5}{3} \arcsin \frac{c}{1+(1-c^2)x_1} + \arcsin \frac{3 c x_1}{1-3x_1} \quad ;$$

c предполагается выбраннымъ настолько малымъ, что $\varphi < \pi/_2$. Имѣемъ

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{1-c^2[1+(1-c^2)x_1]^{-2}}} \frac{-c(1-c^2)}{[1+(1-c^2)x_1]^2} + \frac{1}{\sqrt{1-9c^2x_1^2(1-3x_1)^{-2}}} \frac{3c}{(1-3x_1)^2} \quad .$$

Первый членъ второй части, отрицательный, больше $-\frac{5}{3}c(1-c^2)^{1/2}$, второй больше $3c$. Поэтому

$$\frac{d\varphi}{dx_1} > -\frac{5}{3}c(1-c^2)^{1/2} + 3c, \text{ и, при } c < 1 \ldots. \frac{d\varphi}{dx_1} > 0 \quad .$$

Но $\frac{d \sec \varphi}{d x_1} = + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx_1}$, то-есть $\frac{d \sec \varphi}{d x_1} > 0$ ч. и т. д.

Подставивъ въ правую часть (84) всюду, кромѣ перваго фактора, $x_1 = 0.129\,102$, мы получаемъ K въ функціи отъ неопредѣленнаго пока параметра c. Возьмемъ теперь $c = 0.2$; для этого значенія $K : a x_1^2$ близко къ минимуму.

Подстановка эта даетъ:

$\log {}^3/_2$ …………………	0.17 609
$\log (1+0.2)^{11/3}$ …………	0.29 033
$\log (0.2)^{-1}$ ……………	0.69 897
$\log (1+x_1)^{8/3}$ …………	0.14 062
$\log (1+0.8\,x_1)^{-5/3}$ ………	9.92 886
$\log [1-3\,(1+0.2)\,x_1]^{-1}$ …	0.27 146
$\log \sec 24^0 20'48''$ ………	0.04 045
Σ …	1.54 678

т. е. $K < 35.22\, a\, x_1^2$. (85)

Подставляя предѣльное значеніе x_1 и въ послѣднее неравенство, имѣемъ

$$K < 0.5871\, \mathrm{tg}^2 q \quad . \tag{86}$$

Неравенство (86) показываетъ, что при $\log t_1 < 8.9-10$, изслѣдуемый нами рядъ навѣрное сходится ($K<1$) еще при $q = 52^0\!.5$. Такое значеніе q превышаетъ верхній предѣлъ возможнаго астрономически q.

Что касается $a x_1^2 = \mathrm{tg}^2 q\, x_1^2$, то величина эта мало отличается отъ $\mathrm{tg}^2(z-q)$. Обычно $z-q$ составляетъ дробь 1^0 и поэтому K меньше ${}^1/_{100}$. Отсюда видно, что разложеніе по степенямъ a сходится быстро. Впрочемъ, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго, предѣлъ остаточнаго члена R_{n+1}, получающійся изъ (64) при значеніи K по (85), существенно больше — по крайней мѣрѣ для малыхъ n — дѣйствительнаго остатка ряда (54) для уравненія (52*).

§ 14. Доказавъ сходимость разложенія голоморфной функціи x'а по степенямъ a, мы перейдемъ теперь къ вычисленію общаго члена этого разложенія, ограничиваясь случаемъ

$$\Pi(x) = x \quad . \tag{87}$$

Уравненіе (87) даетъ $\Pi'(x) = 1$, и поэтому — см. (54) — искомымъ является выраженіе

$$\frac{d^n}{d x_1^{\,n}} f^{n+1}(x_1) \quad , \tag{88}$$

гдѣ функція $f(x)$, равная $x^2 \mathfrak{z}^{-1}$, опредѣляется уравненіемъ (61).

Проблему рѣшаемъ по слѣдующему плану:

1) находимъ общій членъ разложенія $\mathfrak{z}$ по степенямъ $x-x_1$;
2) „ „ „ „ $\mathfrak{z}^{-1}$ „ „ „ ;
3) „ „ „ „ $x^2\mathfrak{z}^{-1}$ „ „ „ ;
4) „ коэффиціентъ при $(x-x_1)^n$ въ разложеніи $f^{n+1}(x)$ по степенямъ $x-x_1$.

1. Имѣемъ

$$(x-x_1)\,\mathfrak{z} = t_1^{\,2/3}(1+x)^p x^q - 1 \quad , \tag{89}$$

гдѣ для удобства обозрѣнія обозначено

$$p = {}^8/_3 \qquad\qquad q = -{}^2/_3 \quad . \tag{90}$$

Дифференцируя по x'у n разъ равенство (89) съ приложеніемъ правила Лейбница, получаемъ

$$\frac{d^n}{d x^n}(x-x_1)\,\mathfrak{z} = t_1^{\,2/3} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\,(1+x)^{p-n+k} x^{q-k} \quad . \tag{91}$$

гдѣ положено $a_{n,k}=\binom{n}{k}p(p-1)\ldots(p-n+k+1)\,q(q-1)\ldots(q-k+1)$, то-есть

$$a_{n,k}=\binom{n}{k}\binom{p}{n-k}\binom{q}{k}(n-k)!\,k!\ . \tag{92}$$

Символомъ $\binom{n}{k}$ обозначаемъ, какъ принято, выраженіе $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$, причемъ $\binom{n}{0}=1$; $k!=1.2.3\ldots k$; $0!=1$.

При $x=x_1$, принимая во вниманіе значеніе t_1 изъ (60), имѣемъ:

$$\left(\frac{d^n}{d\,x_1^{\,n}}(x-x_1)\mathfrak{z}\right)_{x=x_1}=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(1+x_1)^{-n+k}x_1^{\,-k}$$

и, слѣдовательно, разложеніе $(x-x_1)\mathfrak{z}$ въ рядъ Тайлора имѣетъ видъ

$$(x-x_1)\mathfrak{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(1+x_1)^{-n+k}x_1^{\,-k}$$

и поэтому, обозначая

$$a_{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}(1+x_1)^{-n+k}x_1^{\,-k} \tag{93}$$

имѣемъ

$$\mathfrak{z}=a_0+\frac{a_1}{1!}(x-x_1)+\frac{a_2}{2!}(x-x_1)^2+\frac{a_3}{3!}(x-x_1)^3+\ldots+\frac{a_n}{n!}(x-x_1)^n+\ldots \tag{94}$$

Послѣднія двѣ формулы и даютъ искомое разложеніе $\mathfrak{z}$.

2. Требуется разложить по степенямъ $x-x_1$ функцію $y={}^1/_{\mathfrak{z}}$.
Имѣемъ

$$\left.\begin{array}{lllll}
 & \mathfrak{z}y & = & 1 & \\
\text{1-ая произв. по } x & \mathfrak{z}'y & + & \mathfrak{z}y'=0 & \\
\text{2-ая} \quad ,, \quad ,, \quad ,, & \binom{2}{0}\mathfrak{z}''y & +\binom{2}{1}\mathfrak{z}'y' & +\binom{2}{2}\mathfrak{z}y''=0 & \\
\ldots\ldots\ldots & & & & \\
i\text{-ая произв.} \quad ,, \quad ,, & \binom{i}{0}\mathfrak{z}^{(i)}y & +\binom{i}{1}\mathfrak{z}^{(i-1)}y'+\ldots & + & \binom{i}{i}\mathfrak{z}y^{i}=0 \\
\ldots\ldots\ldots & & & & \\
m\text{-ая произв.} \quad ,, \quad ,, & \binom{m}{0}\mathfrak{z}^{(m)}y & +\binom{m}{1}\mathfrak{z}^{(m-1)}y'+\ldots & & +\binom{m}{m-1}\mathfrak{z}'y^{(m-1)}+\binom{m}{m}\mathfrak{z}y^{(m)}=0
\end{array}\right\} \tag{95}$$

Тождества эти позволяютъ опредѣлить $y, y', y'', \ldots y^{(m)}$ по $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'', \ldots \mathfrak{z}^{(m)}$ при всякомъ x, и, въ частности, при $x=x_1$. При послѣднемъ значеніи x имѣемъ $\mathfrak{z}=a_0$, $\mathfrak{z}'=a_1$, $\mathfrak{z}''=a_2, \ldots \mathfrak{z}^{(m)}=a_m$. Обозначимъ

$$\Big/_{x=x_1} y=b_0 \qquad \Big/_{x=x_1} y'=b_1 \qquad \Big/_{x=x_1} y''=b_2,\ldots \qquad \Big/_{x=x_1} y^{(m)}=b_m\ .$$

Легко убѣдиться, что опредѣлитель системы (95), фигурирующій въ знаменателѣ всѣхъ неизвѣстныхъ $b_0, b_1, \ldots b_m$ есть $\mathfrak{z}^{m+1}=a_0^{\,m+1}$ (произведеніе членовъ главной діагонали). Замѣтивъ это, имѣемъ:

$$b_m=(-1)^m\frac{D_m}{a_0^{\,m+1}} \tag{96}$$

гдѣ D_m есть опредѣлитель

$$D_m = \begin{vmatrix} \binom{1}{0}a_1 & \binom{1}{1}a_0 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ \binom{2}{0}a_2 & \binom{2}{1}a_1 & \binom{2}{2}a_0 & 0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ \binom{3}{0}a_3 & \binom{3}{1}a_2 & \binom{3}{2}a_1 & \binom{3}{3}a_0 & 0\ldots\ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m-1}{0}a_{m-1} & \binom{m-1}{1}a_{m-2} & \binom{m-1}{2}a_{m-3} & \binom{m-1}{3}a_{m-4} & \ldots\ldots & \binom{m-1}{m-1}a_0 \\ \binom{m}{0}a_m & \binom{m}{1}a_{m-1} & \binom{m}{2}a_{m-2} & \binom{m}{3}a_{m-3} & \ldots\ldots & \binom{m}{m-1}a_1 \end{vmatrix} \tag{97}$$

Общій членъ опредѣлителя D_m — въ i-ой строкѣ и k-омъ столбцѣ — есть

$$\binom{i}{k-1}a_{i-k+1} \;.$$

Въ частности, изъ формулъ (96) и (97) получаемъ

$$\left.\begin{aligned} & b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} \qquad b_2 = \frac{2a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3} \qquad b_3 = \frac{6a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3 - 6a_1^3}{a_0^4} \\ & b_4 = \frac{24a_1^4 - 36a_0 a_1^2 a_2 + 8a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0^2 a_2^2 - a_0^3 a_4}{a_0^5} \;. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Разлагая $y = 1/\mathfrak{z}$ въ рядъ Тайлора, имѣемъ

$$y = b_0 + \frac{b_1}{1}(x-x_1) + \frac{b_2}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{b_3}{3!}(x-x_1)^3 + \ldots + \frac{b_m}{m!}(x-x_1)^m + \ldots \tag{99}$$

Значенія коэффиціентовъ даются формулами (96).

3. Что касается функціи x^2, то имѣемъ просто

$$x^2 = [x_1 + (x-x_1)]^2 = x_1^2 + 2x_1(x-x_1) + (x-x_1)^2 \;,$$

и поэтому, если положимъ

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathfrak{z}} = c_0 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)^2 + \ldots + c_m(x-x_1)^m + \ldots \;, \tag{100}$$

то для коэффиціентовъ c_n получается

$$c_n = \frac{1}{n!}[n(n-1)b_{n-2} + 2nx_1 b_{n-1} + x_1^2 b_n] \;. \tag{101}$$

4. Остается найти $\left(\frac{d^n}{dx^n}f^{n+1}(x)\right)_{x=x_1}$, то-есть взятый $n!$ разъ коэффиціентъ при $(x-x_1)^n$ въ разложеніи $f^{n+1}(x)$ по степенямъ $x-x_1$. Находя $(n+1)$-ую степень безконечнаго ряда (100) по правилу Ньютона, получимъ

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}f^{n+1}(x)\right)_{x=x_1} = \sum_{\substack{\alpha_0+\ldots+\alpha_n=n+1 \\ \alpha_1+\ldots+n\alpha_n=n}} \frac{(n+1)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}c_0^{\alpha_0}c_1^{\alpha_1}\ldots c_n^{\alpha_n}.n! = (n+1)!\,F_{n+1}x_1(x_1^2)^{n+1} \;, \tag{102}$$

причемъ черезъ F_{n+1} нами обозначенъ коэффиціентъ въ искомомъ разложеніи (54)

$$x = x_1 + x_1 F_1(x_1^2 a) + x_1 F_2(x_1^2 a)^2 + x_1 F_3(x_1^2 a)^3 + \ldots \tag{103}$$

Замѣтимъ, что общая формула (102) даетъ

$$\left(\frac{d^0}{dx^0}f(x)\right)_{x=x_1}=c_0 \qquad \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dx}f^2(x)\right)_{x=x_1}=2\,c_0\,c_1 \qquad \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dx^2}f^3(x)\right)_{x=x_1}=3\,c_0\,(c_1^{\,2}+c_0\,c_2) \qquad (104)$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dx^3}f^4(x)\right)_{x=x_1}=4\,c_0\,(c_1^{\,3}+3\,c_0\,c_1\,c_2+c_0^{\,2}\,c_3) \qquad \frac{1}{4!}\left(\frac{d^4}{dx^4}f^5(x)\right)_{x=x_1}=5\,c_0\,(c_1^{\,4}+6\,c_0\,c_1^{\,2}\,c_2+2\,c_0^{\,2}\,c_2^{\,2}+4\,c_0^{\,2}\,c_1\,c_3+c_0^{\,3}\,c_4)\,.$$

Сопоставленіе.

Для вычисленія любого коэффиціента F_{n+1} въ разложеніи (103) находимъ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\, a_n$ по формуламъ (93), послѣ чего формулы (96) дадутъ $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\, b_n$, формулы (101) — $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\, c_n$, и F_{n+1} найдется по (102).

§ 15. Пользуясь общими формулами, вычислимъ F_1, F_2, F_3.

1. По формулѣ (93), выведя за скобки въ a_n биномъ $(1+x_1)^{-n}x_1^{-n}$, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=(1+x_1)^{-1}x_1^{-1}\Big\{p\,x_1+q\,(1+x_1)\Big\}\\
a_1&=\frac{1}{2}(1+x_1)^{-2}x_1^{-2}\Big\{p\,(p-1)\,x_1^{\,2}+2\,p\,q\,(1+x_1)\,x_1+q\,(q-1)\,(1+x_1)^2\Big\}\\
a_2&=\frac{1}{3}(1+x_1)^{-3}x_1^{-3}\Big\{p\,(p-1)\,(p-2)\,x_1^{\,3}+3\,p\,(p-1)\,q\,x_1^{\,2}(1+x_1)+3\,p\,q\,(q-1)\,x_1\,(1+x_1)^2+\\
&\qquad+q\,(q-1)\,(q-2)\,(1+x_1)^3\Big\}\\
a_3&=\frac{1}{4}(1+x_1)^{-4}x_1^{-4}\Big\{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,x_1^{\,4}+4\,p\,(p-1)\,(p-2)\,q\,x_1^{\,3}(1+x_1)+\\
&\qquad+6\,p\,(p-1)\,q\,(q-1)\,x_1^{\,2}\,(1+x_1)^2+4\,p\,q\,(q-1)\,(q-2)\,x_1\,(1+x_1)^3+\\
&\qquad+q\,(q-1)\,(q-2)\,(q-3)\,(1+x_1)^4\Big\}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(105)$$

Замѣтивъ, что

$$p=\frac{8}{3} \qquad p\,(p-1)=\frac{40}{9} \qquad p\,(p-1)\,(p-2)=\frac{80}{27} \qquad p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)=-\frac{80}{81}$$

$$q=-\frac{2}{3} \qquad q\,(q-1)=\frac{10}{9} \qquad q\,(q-1)\,(q-2)=-\frac{80}{27} \qquad q\,(q-1)\,(q-2)\,(q-3)=\frac{880}{81}\,,$$

получимъ изъ (105), послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$\left.\begin{aligned}
a_0&=-\frac{2}{3}\,(1+x_1)^{-1}x_1^{-1}(1-3\,x_1)\\
a_1&=\frac{1}{9}\,(1+x_1)^{-2}x_1^{-2}(5-6\,x_1+9\,x_1^{\,2})\\
a_2&=-\frac{80}{81}\,(1+x_1)^{-3}x_1^{-3}\\
a_3&=\frac{20}{81}\,(1+x_1)^{-4}x_1^{-4}(11+12\,x_1)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(106)$$

Обращаетъ на себя вниманіе большая простота выраженій для a_2 и a_3: коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x_1 взаимно уничтожаются, чего a priori нельзя было ожидать и что обусловлено лишь *частными численными* значеніями p и q.

Выраженіемъ для a_3 мы дальше не пользуемся.

2. Подставляя найденныя значенія a_0, a_1, a_2 въ формулы (98), получаемъ послѣ приведеній:

$$
\begin{aligned}
&b_0 = -\frac{3}{2}\frac{(1+x_1)\,x_1}{1-3x_1} \qquad\qquad b_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{5-6x_1+9x_1^2}{(1-3x_1)^2} \\
&b_2 = +\frac{1}{36}\frac{(1+x_1)^{-1}x_1^{-1}}{(1-3x_1)^3}(5-60x_1-378x_1^2+324x_1^3-243x_1^4) \quad .
\end{aligned}
\tag{107}
$$

3. По формулѣ (101) имѣемъ, послѣ приведеній:

$$
\begin{aligned}
&c_0 = -\frac{3}{2}\frac{(1+x_1)\,x_1^3}{1-3x_1} \qquad\qquad c_1 = -\frac{1}{4}\frac{x_1^2}{(1-3x_1)^2}(17-30x_1-27x_1^2) \\
&c_2 = -\frac{1}{72}\frac{x_1(1+x_1)^{-1}}{(1-3x_1)^3}(283-948x_1+378x_1^2+972x_1^3+243x_1^4) \quad .
\end{aligned}
\tag{108}
$$

4. Пользуясь теперь выраженіями (104), получаемъ, послѣ приведеній:

$$
\frac{1}{1}\left(\frac{d^0}{dx^0}f(x)\right)_{x=x_1} = -\frac{3}{2}\frac{(1+x_1)\,x_1^3}{1-3x_1} \qquad\qquad \frac{1}{1}\left(\frac{d}{dx}f^2(x)\right)_{x=x_1} = \frac{3}{4}\frac{(1+x_1)\,x_1^5}{(1-3x_1)^3}(17-30x_1-27x_1^2)
$$

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}f^3(x)\right)_{x=x_1} = -\frac{3}{16}\frac{(1+x_1)\,x_1^7}{(1-3x_1)^5}(575-2004x_1+162x_1^2+2916x_1^3+1215x_1^4) \quad ,
$$

и отсюда, по (102):

$$
\begin{aligned}
&F_1 = -\frac{3}{2}\frac{1+x_1}{1-3x_1} \qquad\qquad F_2 = \frac{3}{8}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^3}(17-30x_1-27x_1^2) \\
&F_3 = -\frac{1}{16}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^5}(575-2004x_1+162x_1^2+2916x_1^3+1215x_1^4) \quad .
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Въ рядѣ (103) a выступаетъ всюду съ факторомъ x_1^2.
Обозначимъ для всего дальнѣйшаго

$$
+\sqrt{a}\,x_1 = \xi \quad , \tag{110}
$$

$$
\xi = x_1 \operatorname{tg} q = \varphi_1 t_1 \operatorname{tg} q = (m \sin^4 q)\,\varphi_1 \quad . \tag{110*}
$$

Умножая обѣ стороны (103) на $\sqrt{a} = \operatorname{tg} q$, получаемъ, въ виду (48):

$$
\underline{\operatorname{tg}(z-q) = \xi + F_1\xi^3 + F_2\xi^5 + F_3\xi^7 + \ldots .} \tag{111}
$$

Исходя изъ этого ряда можно бы получить разложенія по четнымъ или нечетнымъ степенямъ ξ (или $\operatorname{tg} q$) для $\log\operatorname{tg}(z-q)$, $\log\sin(z-q)$, $z-q$ и т. д. — съ коэффиціентами, являющимися функціями одного параметра t_1. Но выкладки, которыя насъ привели къ (111), настолько длинны, что пожалуй только другой независимый выводъ упомянутыхъ основныхъ разложеній убѣдитъ читателя въ полной ихъ корректности.

§ 16. Сложность выкладокъ двухъ предыдущихъ §§ объясняется, въ значительной степени, тѣмъ невыгоднымъ преобразованіемъ уравненія (51), которое понадобилось для приведенія его къ Лагранжеву типу. Болѣе изящные результаты можно получить примѣненіемъ теоремы В р о н с к а г о, частнымъ случаемъ которой является разложеніе (54) Лагранжа. Методъ Вронскаго можетъ быть, конечно, примѣненъ и къ уравненію (51), основанному на преобразованіи Штейнбринка, но, для болѣе всесторонней провѣрки, мы возьмемъ здѣсь за исходное другое преобразованіе, именно (G_4), см. § 10.

Полагая

$$\tau' = m\sin^3 q \cos\tfrac{1}{2}(z+q)\sec\tfrac{1}{2}(z-q) \qquad (112)\ , \qquad\qquad f = 1 + f^4\tau' \qquad (113)$$

(f.... наименьшее значеніе, удовлетворяющее этому уравненію)

можемъ получить корень Гауссова уравненія изъ соотношенія

$$\sin(z-q) = (m\sin^4 q)\,.\,f^4\ . \qquad (114)$$

Обозначимъ, какъ раньше, $t_1 = (m\sin^4 q)\operatorname{ctg} q = m\sin^3 q\cos q$; пусть f_1 есть соотвѣтственное значеніе f изъ (113). Обозначимъ еще, какъ выше, $\xi = (m\sin^4 q) f_1^4$, что даетъ по (114):

$$\sin(z-q) = (f^4 : f_1^4)\,\xi\ . \qquad (115)$$

Замѣтивъ, что $\cos\frac{1}{2}(z+q) = \cos[q+\frac{1}{2}(z-q)] = \cos q\cos\frac{1}{2}(z-q) - \sin q\sin\frac{1}{2}(z-q)$, имѣемъ для τ', по (112):

$$\tau' = m\sin^3 q\cos q - (m\sin^4 q)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z-q) = t_1 - \frac{\sin(z-q)}{f^4}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(z-q) = t_1 - \frac{2}{f^4}\sin^2\tfrac{1}{2}(z-q)\ ,$$

$$\tau' = t_1 + \frac{\cos(z-q) - 1}{f^4}\ . \qquad (116)$$

Подставляя это значеніе τ' въ (113), получаемъ вновь уравненіе (35):

$$f = 1 + f^4 t_1 + \cos(z-q) - 1\ , \qquad\qquad f - f^4 t_1 = \cos(z-q)\ .$$

Но $\cos(z-q) = [1-\sin^2(z-q)]^{1/2} = [1-(\xi f_1^{-4})^2 f^8]^{1/2}$, и поэтому послѣднее уравненіе даетъ

$$\underline{1-(f-t_1 f^4)^2 - (\xi^2 f_1^{-8}) f^8 = 0\ .} \qquad (117)$$

Вронскій указалъ [27, стр. 31] разложеніе по степенямъ $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ произвольной функціи $F(x)$ корня x уравненія

$$0 = f(x) + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) + \ldots.\ ,$$

гдѣ $f(x)$, $f_1(x)$,$f_2(x)$, $f_3(x), \ldots.$ суть заданныя функціи. Пользуясь формулой Вронскаго, въ ея частномъ случаѣ, когда имѣется лишь одна независимая перемѣнная, мы могли бы написать для (117) общій членъ разложенія любой функціи аргумента f по степенямъ $\xi^2 f_1^{-8}$, причемъ коэффиціенты зависѣли бы отъ параметра t_1. Первоначально мы и примѣнили этотъ методъ къ уравненію (117), въ его непреобразованномъ видѣ. Для простого вывода также и остаточнаго члена ряда, мы здѣсь изложимъ результаты, которые получаются, если уравненіе (117) дѣленіемъ на f^8 привести къ виду

$$\underline{G(f) - \beta = 0\ ,} \qquad (118)$$

гдѣ положено

$$G(f) = f^{-8} - f^{-6} + 2t_1 f^{-3} - t_1^2 \qquad (119), \qquad\qquad \beta = \xi^2 f_1^{-8}\ . \qquad (120)$$

Пусть $H(f) = H$ есть аналитическая функція корня f уравненія (118). Для n'ой производной H по β имѣемъ (см. Żorawski [28]):

$$\frac{d^n H}{d\beta^n} = \frac{1}{1!\,2!\ldots.(n-1)!}\left(\frac{dG}{df}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} . W\left(\frac{dG}{df}, \frac{dG^2}{df}, \ldots.\frac{dG^{n-1}}{df}, \frac{dH}{df}\right)\ , \qquad (121)$$

гдѣ символомъ W обозначенъ опредѣлитель Вронскаго. Полагая

$$\frac{dG}{df}=G',\ \frac{dG^2}{df}=(G^2)',\ \ldots.\ \frac{d^mG^k}{df^m}=(G^k)^{(m)},\ \frac{dH}{df}=H',\ \frac{d^2H}{df^2}=H''\ \text{и т. д.,}$$

имѣемъ, согласно опредѣленію Вронскіановъ:

$$W\left(\frac{dG}{df},\frac{dG^2}{df},\ldots.\frac{dG^{n-1}}{df},\frac{dH}{df}\right)=\begin{vmatrix} G' & (G^2)' & (G^3)'\ldots.(G^{n-1})' & H' \\ G'' & (G^2)'' & (G^3)''\ldots.(G^{n-1})'' & H'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G^{(n)} & (G^2)^{(n)} & (G^3)^{(n)}\ldots.(G^{n-1})^{(n)} & H^{(n)} \end{vmatrix} \tag{122}$$

Будемъ отмѣчать индексомъ 1 внизу значенія функцій при $\beta=0$. Такъ напр. $\left(\frac{dH}{d\beta}\right)_1=\left(\frac{dH}{d\beta}\right)_{\beta=0}$. Разложеніе H по степенямъ β въ рядъ Маклорена даетъ

$$H-H_1=\overset{\text{I чл.}}{\beta\left(\frac{dH}{d\beta}\right)_1}+\overset{\text{II чл.}}{\frac{\beta^2}{2}\left(\frac{d^2H}{d\beta^2}\right)_1}+\overset{\text{III чл.}}{\frac{\beta^3}{6}\left(\frac{d^3H}{d\beta^3}\right)_1}+\ldots.+\frac{\beta^n}{n!}\left(\frac{d^nH}{d\beta^n}\right)_1+R_{n+1} \tag{123}$$

причемъ остаточный членъ въ формѣ Лагранжа равенъ:

$$R_{n+1}=\frac{\beta^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}H}{d\beta^{n+1}}\right) \tag{124}$$

гдѣ производная $\left(\frac{d^{n+1}H}{d\beta^{n+1}}\right)$ берется для нѣкотораго значенія независимаго перемѣннаго между 0 и β. Можно также написать:

$$R_{n+1}=\frac{\beta^n}{n!}\left\{\left(\frac{d^nH}{d\beta^n}\right)-\left(\frac{d^nH}{d\beta^n}\right)_1\right\} \tag{124*}$$

По (121) или же непосредственнымъ дифференцированіемъ находимъ:

$$\frac{dH}{d\beta}=\frac{H'}{G'},\quad \frac{d^2H}{d\beta^2}=\frac{1}{G'^3}(G'H''-G''H'),\quad \frac{d^3H}{d\beta^3}=\frac{1}{G'^5}\Big((3G''^2-G'G''')H'-3G'G''H''+G'^2H'''\Big). \tag{125}$$

Вводя обозначенія:

$$d'=-4+3f^2-3t_1f^5 \qquad d''=12-7f^2+4t_1f^5 \qquad d'''=-30+14f^2-5t_1f^5 \tag{126}$$

получаемъ отъ дифференцированія (119):

$$G'=2f^{-9}d' \qquad G''=6f^{-10}d'' \qquad G'''=24f^{-11}d''' ; \tag{127}$$

при $\beta=0$, т.-е. при f — см. (113, 60) — равномъ $f_1=1+x_1$

$$d_1'=-(1-3x_1) \qquad d_1''=5-10x_1-3x_1^2 \qquad d_1'''=-16+23x_1+9x_1^2. \tag{126*}$$

Принимая во вниманіе послѣднія формулы, получаемъ выраженія членовъ ряда (123):

$$\text{I чл.}=-\frac{\xi^2}{2}\frac{1+x_1}{1-3x_1}H_1',$$

$$\text{II чл.}=\frac{\xi^4}{8}\frac{1}{(1-3x_1)^3}\Big\{3(1+x_1)(5-10x_1-3x_1^2)H_1'+(1+x_1)^2(1-3x_1)H_1''\Big\} \tag{128}$$

$$\text{III чл.}=-\frac{\xi^6}{48}\frac{1}{(1-3x_1)^5}\Big\{3(1+x_1)(161-616x_1+390x_1^2+432x_1^3+81x_1^4)H_1'-$$
$$-9(1+x_1)^2(-5+25x_1-27x_1^2-9x_1^3)H_1''+(1+x_1)^3(1-6x_1+9x_1^2)H_1'''\Big)\Big\}$$

Чтобы вывести разложеніе для $\log\sin(z-q)$, полагаемъ

$$H=\log\sin(z-q)=\log(m\sin^4 q)+4\log f \quad , \qquad \text{откуда}$$

$$H'=\frac{4M}{f} \qquad H''=-\frac{4M}{f^2} \qquad H'''=\frac{8M}{f^3}$$

$$H_1=\log\xi \qquad H_1'=4M(1+x_1)^{-1} \qquad H_1''=-4M(1+x_1)^{-2} \qquad H_1'''=8M(1+x_1)^{-3} \quad .$$

Формула (123), въ виду (128), даетъ:

$$\boxed{1} \qquad \underline{\log\sin(z-q)=\log\xi+A_1\xi^2+A_2\xi^4+A_3\xi^6+\ldots\ldots} \; , \tag{A}$$

гдѣ положено

$$A_1=-\frac{2M}{1-3x_1} \qquad A_2=\frac{M}{2(1-3x_1)^3}(14-27x_1-9x_1^2)$$

$$A_3=-\frac{M}{12(1-3x_1)^5}(440-1635x_1+945x_1^2+1215x_1^3+243x_1^4) \quad . \tag{129}$$

Подобнымъ образомъ, пользуясь формулами (114, ... 128), можно бы найти разложенія, по степенямъ ξ, функцій $\sin(z-q)$, $\cos(z-q)$, $\log\cos(z-q)$ .... и т. д.

§ 17. Исходя изъ разложенія (A) для $\log\sin(z-q)$, мы найдемъ *послѣдовательно* коэффиціенты рядовъ

$$\boxed{2} \quad \sin(z-q) = \xi+B_1\xi^3+B_2\xi^5+B_3\xi^7+\ldots\ldots \tag{B}$$

$$\boxed{3} \quad \cos(z-q) = 1+C_1\xi^2+C_2\xi^4+C_3\xi^6+\ldots\ldots \tag{C}$$

$$\boxed{4} \quad \log\cos(z-q) = D_1\xi^2+D_2\xi^4+D_3\xi^6+\ldots\ldots \tag{D}$$

$$\boxed{5} \quad \underline{\log \operatorname{tg}(z-q) = \log\xi+E_1\xi^2+E_2\xi^4+E_3\xi^6+\ldots\ldots} \tag{E}$$

$$\boxed{6} \quad \operatorname{tg}(z-q) = \xi+F_1\xi^3+F_2\xi^5+F_3\xi^7+\ldots\ldots \tag{F}$$

Послѣднее разложеніе было уже нами найдено въ § 15. Выводя разложенія (A), (B), (C), (D), (E), (F) *послѣдовательно*, одно изъ другого, мы получимъ контроль хотя и простыхъ по существу, но хлопотливыхъ выкладокъ.

$\boxed{2}$. Коэффиціенты B_1, B_2, B_3, выражаются въ функціи A_1, A_2, A_3, слѣдующимъ образомъ:

$$MB_1=A_1 \qquad MB_2=A_2+\frac{1}{2M}A_1^2 \qquad MB_3=A_3+\frac{1}{M}A_1A_2+\frac{1}{6M^2}A_1^3 \; , \tag{130}$$

какъ легко найти, возвысивъ 10 въ степень $\log\sin(z-q)$. Подставляя въ (130) вышенайденныя значенія коэффиціентовъ A, получимъ, отчасти послѣ длинныхъ приведеній:

$$B_1=-\frac{2}{1-3x_1} \qquad B_2=\frac{3}{2}\frac{1}{(1-3x_1)^3}(6-13x_1-3x_1^2)$$

$$B_3=\frac{1}{4}\frac{1}{(1-3x_1)^5}(-208+853x_1-651x_1^2-513x_1^3-81x_1^4) \quad . \tag{130*}$$

$\boxed{3}$. Такъ такъ $\cos = (1-\sin^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 - \frac{1}{8}\sin^4 - \frac{1}{16}\sin^6 \ldots$, то для коэффиціентовъ C, въ функціи B, получаемъ

$$C_1 = -\frac{1}{2} \qquad -C_2 = B_1 + \frac{1}{8} \qquad -C_3 = \frac{1}{2}(B_1+1) + B_2 + \frac{1}{16} \quad . \tag{131}$$

Отсюда, пользуясь (130*) —

$$C_1 = -\frac{1}{2} \qquad C_2 = \frac{3}{8}\frac{5+x_1}{1-3x_1} \qquad C_3 = -\frac{1}{16}\frac{1}{(1-3x_1)^3}(161 - 321x_1 - 189x_1^2 - 27x_1^3) \quad . \tag{131*}$$

$\boxed{4}$. Коэффиціенты D выражаются въ функціи C слѣдующимъ образомъ

$$D_1 = MC_1 \qquad D_2 = M(C_2 - \frac{1}{2}C_1^2) \qquad D_3 = M(C_3 - C_1 C_2 + \frac{1}{3}C_1^3) \quad . \tag{132}$$

Подставляя сюда (131*), имѣемъ

$$D_1 = -\frac{M}{2} \qquad D_2 = \frac{M}{4}\frac{7+3x_1}{1-3x_1} \qquad D_3 = -\frac{M}{6}\frac{1}{(1-3x_1)^3}(55 - 90x_1 - 108x_1^2 - 27x_1^3) \quad . \tag{132*}$$

$\boxed{5}$. Принимая во вниманіе, что $\log\operatorname{tg} = \log\sin - \log\cos$, получаемъ:

$$E_1 = A_1 - D_1 \qquad E_2 = A_2 - D_2 \qquad E_3 = A_3 - D_3 \quad , \tag{133}$$

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -\frac{3M}{2}\frac{1+x_1}{1-3x_1} \qquad E_2 = \frac{3M}{4}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^3}(7 - 12x_1 - 9x_1^2) \\ E_3 &= -\frac{1}{4}\frac{M}{(1-3x_1)^5}(110 - 265x_1 - 303x_1^2 + 531x_1^3 + 621x_1^4 + 162x_1^5) = \\ &= -\frac{M}{4}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^5}(110 - 375x_1 + 72x_1^2 + 459x_1^3 + 162x_1^4) \quad . \end{aligned}\right\} \tag{133*}$$

$\boxed{6}$. Наконецъ для коэффиціентовъ F, получаемъ, наподобіе (130), уравненія:

$$MF_1 = E_1 \qquad MF_2 = E_2 + \frac{1}{2M}E_1^2 \qquad MF_3 = E_3 + \frac{1}{M}E_1 E_2 + \frac{1}{6M^2}E_1^3 \quad . \tag{134}$$

Подставляя сюда выраженія (133*), находимъ, послѣ приведеній:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{3}{2}\frac{1+x_1}{1-3x_1} \qquad F_2 = \frac{3}{8}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^3}(17 - 30x_1 - 27x_1^2) \\ F_3 &= -\frac{1}{16}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^5}(575 - 2004x_1 + 162x_1^2 + 2916x_1^3 + 1215x_1^4) \quad . \end{aligned} \tag{134*}$$

Сравнивая эти выраженія для F съ выведенными у насъ раньше [(109) въ § 15] изъ преобразованія Штейнбринка и теоремы Лагранжа, мы замѣчаемъ полную ихъ тожественность, чѣмъ провѣряется длинный рядъ аналитическихъ разсужденій и выкладокъ.

§ 18. Займемся здѣсь выводомъ еще другихъ разложеній.

$\boxed{7}$. Полагая въ (E) .... $\xi = \operatorname{tg}\eta$, имѣемъ

$$\log\operatorname{tg}(z-q) = \log\operatorname{tg}\eta + E_1\operatorname{tg}^2\eta + E_2\operatorname{tg}^4\eta + E_3\operatorname{tg}^6\eta + \ldots \tag{E*}$$

Уголъ η близокъ къ $z—q$. — Имѣемъ тожественно

$$\log\cos^p\eta = p\log\cos\eta = p\log(1+\mathrm{tg}^2\eta)^{-1/2} = -\frac{p}{2}\log(1+\mathrm{tg}^2\eta), \text{ или}$$

$$\log\cos^p\eta = -\frac{M}{2}p\,\mathrm{tg}^2\eta + \frac{M}{4}p\,\mathrm{tg}^4\eta - \frac{M}{6}p\,\mathrm{tg}^6\eta + \ldots.$$

Вычитая это уравненіе изъ (E*), получаемъ, принявъ $p = -2E_1 : M$

$$\log\mathrm{tg}(z—q) - \log\mathrm{tg}\,\eta\,.\cos^{-2E_1:M}\eta = \left(E_2 + \frac{1}{2}E_1\right)\mathrm{tg}^4\eta + \left(E_3 - \frac{1}{3}E_1\right)\mathrm{tg}^6\eta + \ \ldots \qquad \text{(EE)}$$

$\boxed{8}$. Имѣемъ вообще: $\mathrm{arc\,tg} = \mathrm{tg} - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 - \frac{1}{7}\mathrm{tg}^7 + \ldots.$, такъ что, изъ ($F$):

$$(z—q) = \xi + \left(F_1 - \frac{1}{3}\right)\xi^3 + \left(F_2 - F_1 + \frac{1}{5}\right)\xi^5 + \left(F_3 + F_1 - F_2 - F_1^2 - \frac{1}{7}\right)\xi^7 + \ldots.$$

Если теперь положимъ, какъ выше, $\xi = \mathrm{tg}\,\eta$, и замѣтимъ, что

$$\xi - \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{1}{5}\xi^5 - \frac{1}{7}\xi^7 + \ldots. = \eta\ ,$$

то, полагая, для сокращенія

$$G_1 = F_1 \qquad G_2 = F_2 - F_1 \qquad G_3 = F_3 + F_1 - F_2 - F_1^2\ , \qquad (135)$$

мы получимъ разложеніе

$$(z—q) = \eta + G_1\,\mathrm{tg}^3\eta + G_2\,\mathrm{tg}^5\eta + G_3\,\mathrm{tg}^7\eta + \ldots. \qquad \text{(G)}$$

Подставляя въ (135) значенія F изъ (134*), находимъ:

$$G_1 = -\frac{3}{2}\frac{1+x_1}{1-3x_1} \qquad G_2 = \frac{9}{8}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^3}(7 - 18x_1 + 3x_1^2)$$

$$G_3 = -\frac{1}{16}\frac{1+x_1}{(1-3x_1)^5}(737 - 3372x_1 + 3942x_1^2 - 324x_1^3 + 729x_1^4)\ . \qquad (135^*)$$

$\boxed{9}$. Замѣтимъ, что, на основаніи (1), $\log\sin z = \frac{1}{4}(\log\sin(z—q) - \log m)$. Отсюда, пользуясь разложеніемъ (A), находимъ:

$$\log\sin z = \log\sin q + \log f_1 + \left(\frac{1}{4}A_1x_1^2\right)\mathrm{tg}^2 q + \left(\frac{1}{4}A_2x_1^4\right)\mathrm{tg}^4 q + \left(\frac{1}{4}A_3x_1^6\right)\mathrm{tg}^6 q + \ldots.\ . \qquad \text{(H)}$$

§ 19. При обычныхъ условіяхъ опредѣленія планетной орбиты величина ξ^2 очень мала и члены нашихъ разложеній убываютъ весьма быстро. Возьмемъ, для примѣра, малую планету изъ середины астероидной зоны ($\log t_1 = 8.40$), наблюденную недалеко отъ момента противостоянія. По Баушингеру [3, p. 271] z въ такихъ случаяхъ врядъ-ли можетъ превзойти 8^0. Допустимъ, что мы имѣемъ дѣло именно съ предѣльнымъ ($z = 8^0$, $q = 7^0 47'$), для сходимости нашихъ рядовъ наименѣе благопріятнымъ случаемъ.

Для $\log t_1 = 8.40 - 10$ находимъ, при $q = 7^0 47'$:

$\log\varphi_1 = 0.0481$ $\quad \log x_1 = \log\varphi_1 t_1 = 8.4481$ $\quad \log E_1 = 9.8641_n - 10$ $\quad \log E_2 = 0.4627$ $\quad \log E_3 = 1.2367_n$

$$\log\xi = \log x_1\,\mathrm{tg}\,q = 7.5838 - 10\ .$$

Въ разложеніи (E) для $\log \operatorname{tg}(z-q)$ значенія послѣдовательныхъ членовъ суть:

$10+\log\xi$	7.583	8..	...	...	...	
$E_1\,\xi^2$	-0.000	010	76.	...	...	.
$E_2\,\xi^4$	$+0.000$	000	000	628	...	
$E_3\,\xi^6$	-0.000	000	000	000	055	.

Если, опредѣливъ $\log \operatorname{tg}(z-q)$, мы вычислимъ отсюда $z-q$ и по найденному z опредѣлимъ $\log\sin z$, то въ виду малости угла $z-q$ ошибка въ $\log \operatorname{tg}(z-q)$ войдетъ въ $\log\sin z$ уменьшенной болѣе, чѣмъ въ 37 разъ (см. § 11); такимъ образомъ уже членъ $E_1\xi^2$ достигаетъ, въ $\log\sin z$, лишь 0.3 единицы VI-го знака, вліяніе же члена $E_2\xi^4$ меньше 0.2 единицы X-го знака. При шестизначномъ вычисленіи орбиты можно бы въ данномъ примѣрѣ ограничиться первымъ членомъ: $\log\xi$.

Чтобы имѣть безспорное право отбрасывать въ разложеніяхъ члены высшихъ порядковъ, недостаточно однако обращать вниманіе на малость первыхъ отбрасываемыхъ членовъ; необходимо при этомъ основываться на изслѣдованіи остатка ряда. Мы выше (§ 13) уже вывели, по методу Коши, выраженіе для верхняго предѣла остаточнаго члена нашихъ разложеній и съ его помощью доказали сходимость рядовъ. Для численнаго опредѣленія предѣла погрѣшности остатокъ (56) Коши оказывается мало пригоднымъ и не можетъ удовлетворить насъ. Такъ, напримѣръ, если въ нашемъ примѣрѣ въ разложеніи $\log(\operatorname{tg}(z-q):\xi)=\log(x:x_1)$ взять члены до $E_2\xi^4$ включительно, то остатокъ R_3 согласно выраженіямъ (64, 85), меньше, по абсолютному значенію $(35.22)^3\xi^6\times(r\Pi:(r-m))$. — Максимумъ модуля $\log(x:x_1)$ на окружности, описанной изъ точки x_1 радіусомъ $0.2\,x_1$, имѣетъ мѣсто при $x=0.8\,x_1$ и равенъ $|\log 0.8|=0.097$. Факторъ $(1-af'(x_1))\,(r:(r-m))$ нѣсколько больше единицы; принимая его равнымъ 1, мы даже уменьшимъ предѣлъ R. Въ этомъ предположеніи получаемъ:

$$|R_4|<(35.22)^3\xi^6\times 0.097\ , \qquad \text{т.-е.} \qquad |R_4|<0.000\,000\,000\,0135\ .$$

Этотъ предѣлъ для R въ нашемъ примѣрѣ ничтожно малъ, но онъ еще весьма далекъ отъ дѣйствительнаго значенія остатка, который, на самомъ дѣлѣ, меньше слѣдующаго члена разложенія, 0.000 000 000 000 055, т.-е. въ 250 разъ меньше предѣла, полученнаго по методу Коши. Въ данномъ частномъ случаѣ R_4 находится далеко за предѣлами точности вычисленій, и эта разница безразлична; но для бо́льшихъ t и $z-q$ мы получили бы изъ остатка Коши совершенно неправильное представленіе о быстротѣ сходимости нашихъ рядовъ. Мы не сомнѣваемся, что при болѣе детальномъ изученіи максимума функціи $af(x):(x-x_1)$ на окружности C, можно бы найти вмѣсто полученнаго нами коэффиціента 35.22 ме́ньшее число; но мы думаемъ, что по существу дѣла такой методъ изслѣдованія остатка даетъ для R_{n+1} слишкомъ высокій предѣлъ: элементы интеграла приходится замѣнять ихъ абсолютными значеніями, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности многіе изъ нихъ могутъ взаимно уничтожаться.

§ 20. Мы изслѣдуемъ погрѣшность, R_4, основной формулы

$$\log\sin(z-q)=\log\xi+A_1\,\xi^2+A_2\,\xi^4+A_3\,\xi^6+R_4\ ,$$

исходя для этого изъ формулы (124), при $H=\log\sin(z-q)=\log(m\sin^4 q)+\log f^4$.

Послѣдняя изъ формулъ (125) даетъ, въ виду (127):

$$\frac{d^8 H}{d\beta^8}=\frac{M}{2}\frac{f^{24}}{d'^5}\cdot S\ , \tag{136}$$

гдѣ обозначено $S = 27\,d''^2 - 12\,d'\,d''' + 9\,d'd'' + 2\,d'^2$. — Вычислимъ S.

$$\begin{array}{rcrrrrrr}
27\,d''^2 & = & 3888 & -4356\,f^2 & +1323\,f^4 & +2592\,t_1\,f^5 & -1512\,t_1\,f^7 & +432\,t_1^2 f^{10} \\
-12\,d'd''' & = & -1440 & +1752\ \text{„} & -504\ \text{„} & -1320\ \text{„} & +684 & -180 \\
9\,d'd'' & = & -432 & +576\ \text{„} & -189\ \text{„} & -468\ \text{„} & +297 & -108 \\
2\,d'^2 & = & +32 & -48\ \text{„} & +18\ \text{„} & +48\ \text{„} & -36 & +18 \\
\hline
S & = & +2048 & -2256\,f^2 & +648\,f^4 & +852\,t_1\,f^5 & -567\,t_1\,f^7 & +162\,t_1^2 f^{10}
\end{array} \qquad (137)$$

Такъ какъ $\frac{d^3 H}{d\beta^3}$ выражается явно черезъ f, но не черезъ β, то, для примѣненія формулы (124*), намъ необходимо изслѣдовать область измѣненій (f); скобками мы будемъ обозначать значенія функцій для нѣкотораго значенія β, удовлетворяющаго неравенствамъ:

$$\xi^2 f_1^{-8} > \beta > 0. \qquad (138)$$

Мы должны также вычислить максимальное значеніе ξ^2, допускаемое нашими основными ограниченіями (62).

Дифференцируя ур. (118), находимъ $df = d\beta : G'$, или, по (127), $df = f^9\,d\beta : 2\,d'$. Интегрируя это равенство, получаемъ

$$(f) = f_1 + \int\limits_0^\beta \frac{f^9}{2\,d'}\,d\beta \quad . \qquad (139)$$

При $\beta = 0$ подъинтегральная функція обращается въ $\frac{(1+x_1)^9}{2(-1+3\,x_1)}$, и, слѣдовательно, она отрицательна. Имѣемъ дальше $\frac{dd'}{df} = 3\,f(2 - 5\,t_1 f^3)$; это выраженіе положительно при $f \leqslant f_1$, такъ что при *уменьшеніи* f абсолютное значеніе отрицательной величины d' *растетъ*, отрицательный же ея знакъ сохраняется. Пока $f > 0$, имѣемъ поэтому $\frac{df}{d\beta} < 0$, причемъ абсолютное значеніе $\left(\frac{df}{d\beta}\right)$ есть максимумъ при $\beta = 0$. Имѣемъ, такимъ образомъ:

$$0 < f_1 - (f) < \frac{(1+x_1)^9}{2\,(1-3\,x_1)} \cdot \beta = \frac{1+x_1}{2(1-3x_1)} \cdot \xi^2 \ . \qquad (140)$$

Выведемъ теперь верхній предѣлъ для ξ^2. Изъ (115) получаемъ,

$$\xi^2 = \sin^2(z-q) \,.\, f_1^8 f^{-8} \ . \qquad (141)$$

Подставляемъ значеніе ξ^2 по (141), въ неравенство (140), которое выполняется въ частности при $(f) = f$; полагая, для краткости, $y = f_1 - f$, имѣемъ

$$y < \frac{1+x_1}{2\,(1-3\,x_1)} \sin^2(z-q) \cdot f_1^8 f^{-8} < C f_1^8 f^{-8} \ , \qquad (142)$$

гдѣ положено

$$C = 0.92142 \sin^2(z-q) \qquad (143)$$

численный коэффиціентъ есть значеніе дроби $\frac{1+x_1}{2\,(1-3\,x_1)}$ при $x_1 = 0.129102$, см. (63).

Неравенство (142) переписываемъ въ видѣ

$$y : f_1 < \frac{C}{f_1}\ \frac{f_1^8}{f^8}\ ,\ \text{т.-е.}\ y : f_1 < \frac{C}{f_1}\ \frac{1}{(1 - y : f_1)^8}$$

Подставляя во второй части этого неравенства вмѣсто $y:f_1$ бо́льшее число $\frac{C}{f_1}f_1^8 \ldots (f=\sin z:\sin q>1)$, получаемъ

$$y:f_1<\frac{C}{f_1}\frac{1}{(1-Cf_1^7)^8}\text{ , т.-е., переходя къ опредѣленію } y,$$

$$f_1-f<\frac{C}{(1-Cf_1^7)^8} \tag{144}$$

При $\log t_1<8.9$ имѣемъ $f_1<1.1291$, и, въ виду 143), находимъ сначала, замѣняя въ знаменателѣ C и f_1 ихъ максимальными значеніями:

$$f_1-f<1.0213\,C=0.9411\sin^2(z-q)\ . \tag{144*}$$

Полагая и здѣсь $z-q=2^0$, получаемъ окончательно

$$0.001\,147>f_1-(f)>0\ . \tag{145}$$

Для ξ^2, согласно (141), получается неравенство

$$\xi^2<\sin^2 2^0 . f_1^8 f^{-8}=\sin^2 2^0 . (1-y:f_1)^{-8}\ .$$

И такъ какъ изъ (144*) получается $y:f_1<1.0213\,(C:f_1)<1.0213\frac{\sin^2 2^0}{2(1-3x_1)}=0.001015$, то для ξ^2 имѣемъ

$$\xi^2<[0.00353]\sin^2 2^0<0.001228\ . \tag{146}$$

Бо́льшимъ значеніямъ ξ^2 соотвѣтствуютъ, при $\log t_1<8.90$, значенія $z-q>2^0$.

§ 21. Разсматриваемъ правую часть выраженія (136). Имѣемъ

$$\left(\frac{f^{24}S}{d'^5}\right)=\frac{(f^{24}S)}{(d'^5)}=\frac{\text{числит.}}{\text{знамен.}} \tag{147}$$

Намъ извѣстно уже, изъ предыдущаго §, что $(d')<d_1'<0$; поэтому

$$(d'^5)=d_1^5(1+\varepsilon'')\text{ , гдѣ } \varepsilon''>0\ . \tag{148}$$

Что можно сказать о числителѣ?

Взявъ производную $f^{24}S$ по f, находимъ, послѣ приведеній:

$$\frac{d}{df}f^{24}S=f^{23}\left\{f\frac{dS}{df}+24\,S\right\}=3f^{23}\left\{16384-19552f^2+6048f^4+8236t_1f^5-5859t_1f^7+1836t_1^2f^{10}\right\} \tag{149}$$

Мы ограничиваемся всюду предположеніемъ $\log t_1\leqslant 8.90$, $(t_1<0.079433)$, т.-е. $\log f_1\leqslant 0.0527331$, $f_1<1.12910$; при $1\leqslant f\leqslant f_1$ имѣемъ слѣдовательно:

$$f<1.12910\ ,\quad f^2<1.27487\ ,\quad f^3<1.43946\ ,\quad f^4<1.62530\ ,\quad f^5<1.83512 \tag{150}$$

Когда выполнены неравенства (150), то сумма первыхъ трехъ членовъ въ фигурныхъ скобкахъ (149) положительна, такъ какъ $\frac{d}{df}(16384-19552f^2+6048f^4)<0$, при $f<1.12910$, между тѣмъ какъ при $f=1.12910\ \ldots\ 16384-19552f^2+6048f^4>1287$, т.-е >0. Сумма двухъ дальнѣйшихъ членовъ, $8236\,t_1f^5-5859\,t_1f^7=t_1f^5(8236-5859f^2)$ также положительна, потому что оба ея фактора положительны. Наконецъ членъ

$1836\, t_1^2 f^{10}$ — положителенъ. Въ общемъ слѣдовательно $\frac{d}{df} f^{24} S > 0$. Вмѣстѣ съ тѣмъ выраженіе $f^{24} S$, при $f > 1$, положительно, потому что оно положительно уже при $f=1$, какъ сразу видно изъ (137). Поэтому, принимая во вниманіе, что $f_1 > (f) > 1$, можемъ написать:

$$(f^{24} S) = (f^{24} S)_1 (1 - \varepsilon'), \quad \text{гдѣ } 1 > \varepsilon' > 0. \tag{151}$$

Остаточный членъ R_3, въ формѣ Лагранжа (124), формулы

$$\log \sin (z - q) = \log \xi + A_1 \xi^2 + A_2 \xi^4 + R_3$$

есть $R_3 = \frac{\beta^3}{3!}\left(\frac{d^3 H}{d\beta^3}\right)$, и, согласно (136), (148), (151):

$$R_3 = \frac{\beta^3}{3!} \frac{M}{2} \frac{(f^{24} S)_1}{d'^5_1} \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon''} = \frac{\beta^3}{3!}\left(\frac{d^3 H}{d\beta^3}\right)_1 \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon''} = \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon''} A_3 \xi^6 \ .$$

Отсюда

$$|R_3| < |A_3 \xi^6| \ . \tag{152}$$

На этомъ неравенствѣ базируется теорія нашихъ вспомогательныхъ таблицъ [30] *для рѣшенія Гауссова уравненія при* ***шестизначномъ*** *вычисленіи орбиты.*

О величинѣ члена $A_3 \xi^6$ даетъ представленіе нижеслѣдующая таблица.

$A_3 \xi^6$ въ единицахъ VI-го знака.

	$q = 5^0$	$q = 10^0$	$q = 15^0$	
$\log t_1 \leqslant 8.40$	0.0000	0.0000	0.0000	
$\log t_1 = 8.60$	0000	0000	0001	
8.80	0000	0007	0092	(153)
8.85	0000	0029	0356	
8.90	0.0002	0.0144	0.1777	

§ 22. Вернемся къ изслѣдованію остатка R_4 ряда (A) § 16. Согласно (124*) и (136) имѣемъ $R_4 = \frac{\beta^3}{3!} \frac{M}{2}\left\{\left(\frac{f^{24} S}{d'^5}\right) - \left(\frac{f^{24} S}{d'^5}\right)_1\right\}$, откуда, въ виду (148) и (151), получаемъ

$$R_4 = -\frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{1+\varepsilon''} \frac{\beta^3}{3!} \frac{M}{2} \left(\frac{f^{24} S}{d'^5}\right)_1 = -\frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{1+\varepsilon''} \frac{\beta^3}{3!} \left(\frac{d^3 H}{d\beta^3}\right)_1 = -\frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{1+\varepsilon''} A_3 \xi^6 \ . \tag{154}$$

Постараемся найти верхніе предѣлы положительныхъ чиселъ ε' и ε''.

Согласно основной теоремѣ о конечныхъ приращеніяхъ

$$(f^{24} S) - (f^{24} S)_1 = [(f) - f_1] \times \left[\text{произв.} \frac{d}{df} f^{24} S \text{ для промеж. знач.}\right] .$$

Лѣвая часть этого равенства равна $-\varepsilon' (f^{24} S)_1$ согласно опредѣленію (151) величины ε'; $|(f) - f_1| \leqslant (f_1 - f)$. Поэтому получаемъ

$$\varepsilon' \leqslant \frac{f_1 - f}{f_1^{24} S_1}\left(\frac{d}{df} f^{24} S\right) = \frac{f_1 - f}{f_1^{24} S_1}\left(f^{24}\left[\frac{dS}{df} + \frac{24}{f} S\right]\right) \ .$$

Отсюда, въ виду того, что $(f):f_1<1$, получаемъ

$$\varepsilon'<\frac{f_1-f}{S_1}\left(\frac{dS}{df}+\frac{24}{f}S\right). \tag{155}$$

Имѣемъ $\frac{dS}{df}=3f(-1504+864f^2+1420\,t_1f^3-1323\,t_1f^5+540\,t_1^2f^8)$. — Сумма $864f^2+1420t_1f^3$ есть число положительное, увеличивающееся вмѣстѣ съ t_1 и вмѣстѣ съ f. Максимумъ ея будетъ при $\log t_1=\log(t_1)_{\max.}=8.90-10$, $f=f_{\max.}=1.1291$. Вычисленіе даетъ: $864f^2+1420t_1f^3<1300$. — Величина: $-1323t_1f^5+540t_1^2f^8=t_1f^5(-1323+540t_1f^3)$ — отрицательна въ интересующей насъ области. Въ общемъ, слѣдовательно, $\frac{dS}{df}<0$ и верхній предѣлъ (155) величины ε' упрощается:

$$\varepsilon'<\frac{24}{S_1}\left(\frac{S}{f}\right)(f_1-f)\ . \tag{155*}$$

Разсмотримъ сначала факторъ $(S):S_1$. По теоремѣ о конечныхъ приращеніяхъ имѣемъ $(S)-S_1=[(f)-f_1]\times\left[\text{произв.}\frac{dS}{df}\text{ для промеж. знач.}\right]$.

Согласно выраженію для $\frac{dS}{df}$ имѣемъ очевидно $\left|\frac{dS}{df}\right|<3f_1(1504+1323\,t_1f_1^5)$, и подстановка максимальныхъ значеній f_1 и t_1 даетъ $\left|\frac{dS}{df}\right|<5800$.

Выше, см. (145), было выведено, что $|f-f_1|<0.00115$. Такимъ образомъ получаемъ: $(S)<S_1+7$, т.-е. $(S):S_1<1+(7:S_1)$. Наименьшее значеніе величины

$$S_1=2048-2256f_1^2+648f_1^4+852(f_1-1)f_1-567(f_1-1)f_1^3+162(f_1-1)^2f_1^2=$$
$$=440-1635x_1+945x_1^2+1215x_1^3+243x_1^4$$

имѣетъ мѣсто, въ области $0<x_1\leqslant 0.129102$, при $x_1=0.129102$ (какъ легко убѣдиться дифференцированіемъ по x_1). Подстановка въ S_1 этого значенія x_1 даетъ: $\min. S_1=247.35$. Поэтому:

$$(S):S_1<1.03\ .$$

Замѣняя еще въ (155*) f черезъ 1, f_1-f черезъ 0.001147 — отъ чего неравенство не нарушится — получаемъ

$$\varepsilon'<0.0284\ . \tag{156}$$

Для опредѣленія ε'' образуемъ разность $(-d')-(-d')_1$. Находимъ, по (126):

$$(-d')-(-d')_1=3[f_1^2-(f^2)]-3t_1[f_1^5-(f^5)]\ .$$

Переходя къ неравенству

$$(-d')-(-d')_1<3[f_1^2-(f^2)]=3[(f)+f_1][f_1-(f)]<6f_1[f_1-(f)]<0.00778\ .$$

Но такъ какъ $(-d')_1=1-3x_1>0.6127$, то получается

$$(-d')<(-d')_1(1+0.0127)\ .$$

Возводя это неравенство въ пятую степень, имѣемъ:

$$(-d'^5)<(-d'^5)_1(1+0.0652)\ ,\quad\text{или}\quad (d'^5)=d_1'^5(1+\varepsilon'')\ ,\ \text{причемъ}$$

$$\varepsilon''<0.0652\ . \tag{157}$$

Согласно (154), искомая погрѣшность $|R_4|$ оказывается меньше

$$\left|R_4\right| < \frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{1+\varepsilon''} |A_3| \xi^6 < 0.088 |A_3| \xi^6, \tag{158}$$

т.-е. меньше $^1/_{11}$ абсолютнаго значенія члена $A_3\xi^6$ (см. табл. (153)).

Остатокъ разложенія (H) § 18, если въ немъ ограничиться написанными членами, меньше, очевидно, $^1/_{44}$ обсолютнаго значенія $A_3\xi^6$.

§ 23. Для нѣкоторыхъ изъ вышевыведенныхъ разложеній мы составили таблицы [31], существенно упрощающія ихъ примѣненіе къ вычисленію z. Для пользованія рядами (E) и (H) мы, кромѣ функцій φ_1 и f_1, указываемъ логариѳмы численныхъ значеній первыхъ двухъ коэффиціентовъ: E_1, E_2 и $\frac{1}{4}A_1x_1^2$, $\frac{1}{4}A_2x_1^4$, но не даемъ уже значеній E_3 и $\frac{1}{4}A_3x_1^6$. Зато мы нѣсколько измѣняемъ значеніе вторыхъ коэффиціентовъ: E_2 и $\frac{1}{4}A_2x_1^4$ — по такому плану, чтобы во второмъ членѣ принять во вниманіе значительную долю третьяго. Нашъ пріемъ базируется на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Пусть требуется функцію $a\xi^6$ представить, въ промежуткѣ $\xi_0 \geqslant \xi \geqslant 0$, функціей $b\,\xi^4$ съ возможно наименьшей погрѣшностью $(a \gtreqless 0)$. Или выражаясь опредѣленнѣе: требуется найти такое b, чтобы верхній предѣлъ, L, абсолютнаго значенія разности $\Theta(\xi)$

$$\Theta(\xi) = a\,\xi^6 - b\,\xi^4\,, \tag{159}$$

при измѣненіи ξ между 0 и ξ_0 — былъ бы возможно малъ.

Варіируя b на δb мы, очевидно, или увеличиваемъ или уменьшаемъ $\Theta(\xi)$ во всемъ интервалѣ. Отсюда заключаемъ, что $\Theta(\xi)$ не можетъ сохранять постояннаго знака во всемъ промежуткѣ, и что $\Theta(\xi)$ должно обращаться въ нуль для нѣкотораго промежуточного значенія $\xi = \xi_1$ $(\xi_0 > \xi_1 > 0)$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы, напримѣръ, $\Theta(\xi)$ было все время >0 при нѣкоторомъ значеніи b, то увеличивъ b на δb мы уменьшили бы всѣ значенія $\Theta(\xi)$ на $\xi^4.\delta b$, отъ чего уменьшилось бы и L. Поэтому непремѣнно для нѣкотораго значенія $\xi = \xi_1$ имѣемъ: $\Theta(\xi_1) = 0$, то-есть $a\,\xi_1^6 = b\,\xi_1^4$ или

$$b = a\,\xi_1^2 \qquad\qquad \xi_0 > \xi_1 > 0\ . \tag{160}$$

Поэтому $\Theta(\xi) = a(\xi^6 - \xi_1^2\xi^4)$. Производная $\frac{d\,\Theta(\xi)}{d\,\xi}$ мѣняетъ знакъ, обращаясь въ нуль, въ нашемъ интервалѣ, лишь для $\xi = \xi'$, причемъ $\xi'^2 = \frac{2}{3}\xi_1^2$. Имѣемъ $\Theta(\xi') = -\frac{4}{27}a\,\xi_1^6$; имѣемъ также $\Theta(\xi_0) = a(\xi_0^6 - \xi_1^2\xi_0^4)$. Функція $\Theta(\xi)$ при измѣненіи ξ между 0 и ξ' непрерывно возрастаетъ (или убываетъ), послѣ чего между ξ' и ξ_0 — она непрерывно убываетъ (или возрастаетъ). Такимъ образомъ числа 0, $\Theta(\xi')$, $\Theta(\xi_0)$, являются экстремальными значеніями $\Theta(\xi)$, и L равно или $|\Theta(\xi')|$ или $|\Theta(\xi_0)|$. Легко сообразить, что при требуемомъ подборѣ b должно быть

$$\Theta(\xi') = -\Theta(\xi_0)\ . \tag{161}$$

Если бы условіе (161) не было выполнено, такъ что, напримѣръ, $\Theta(\xi')$ было бы по абсолютному значенію больше $\Theta(\xi_0)$ на конечную величину, то, сообщивъ ξ_1 варіацію $\delta\xi_1$ въ соотвѣтственномъ направленіи, мы уменьшили бы $|\Theta(\xi')|$, и вмѣстѣ съ этимъ также L, что противорѣчило бы требуемому свойству b. Согласно (161) имѣемъ слѣдовательно:

$$-\frac{4}{27}a\xi_1^6 = -a(\xi_0^6 - \xi_1^2\xi_0^4) .$$

Полагая

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}\right)^2 = \zeta \tag{162}$$

получаемъ для ζ кубическое уравненіе;

$$\zeta^3 + \frac{27}{4}\zeta - \frac{27}{4} = 0 ,$$

имѣющее одинъ дѣйствительный корень, равный $\frac{3}{2}[(1+\sqrt{2})^{1/3} + (1-\sqrt{2})^{1/3}]$.

Такимъ образомъ, по (162) и (160):

$$\underline{b = \frac{3}{2}a[(1+\sqrt{2})^{1/3} + (1-\sqrt{2})^{1/3}]\xi_0^2 = 0.89411\, a\xi_0^2} . \tag{163}$$

При такомъ выборѣ b абсолютное значеніе $a\xi^6 - b\xi^4$, при $\xi_0 > \xi > 0$, не превосходитъ $\left|\frac{4}{27}a\xi_1^6\right|$, то-есть $\frac{4}{27}(0.89411)^3 a\xi_0^6$, и

$$\underline{L < 0.106\,|a|\,\xi_0^6} . \tag{164}$$

Формулу (163), согласно (160), можно толковать слѣдующимъ образомъ. Вычисливъ $\xi_1 = \xi_0\left\{\frac{3}{2}[(1+\sqrt{2})^{1/3} + (1-\sqrt{2})^{1/3}]\right\}^{1/2}$, выбираютъ b такимъ, чтобы для $\xi = \xi_1$ членъ $a\xi^6$ точно воспроизводился черезъ $b\xi^4$.

§ 24. Перейдемъ теперь къ детальному описанію разложеній, на которыхъ мы остановились въ „Основныхъ Таблицахъ" [31] составляющихъ вторую часть нашего изслѣдованія. Мы предполагаемъ постоянно: $\log t_1 \leqslant 8.90-10$; $z-q \leqslant 2^0$.

1. Согласно (E) имѣемъ:

$$\log \operatorname{tg}(z-q) \doteqdot \log\xi + E_1\xi^2 + E_2\xi^4 + E_3\xi^6 \tag{E'}$$

гдѣ E_1, E_2, E_3 опредѣляются по формуламъ (133*), $\xi = x_1 \operatorname{tg} q = \varphi_1 t_1 \operatorname{tg} q$. Членъ $E_3\xi^6$ можетъ быть, какъ выше пояснено, замѣненъ черезъ 0.89411 $E_3\xi_0^2\xi^4$, съ погрѣшностью, не превосходящей, при $0 < \xi < \xi_0$, величины

$$0.106\,|E_3|\,\xi_0^6 .$$

Для большихъ значеній t_1 мы принимаемъ за ξ_0 то значеніе ξ, которому соотвѣтствуетъ $z-q = 2^0$. Для тѣхъ значеній t_1, при которыхъ, по даннымъ таблицъ Энке, $(z-q)_{max.} < 2^0$, мы беремъ за ξ_0 наибольшее возможное значеніе ξ.

Мы должны здѣсь объяснить, какимъ образомъ нами выведено было $(z-q)_{max.}$ изъ данныхъ Энке. Въ таблицѣ I Энке [13] дается въ функціи q, въ числѣ другихъ величинъ, $\log m''$ — *наименьшее* возможное значеніе $\log m$.

Умножая m'' на $\sin^8 q \cos q$, мы получаемъ, для всякаго q, *наименьшее* возможное значеніе $(t_1)_{min.} = m'' \sin^3 q \cos q$; значеніе это, какъ легко убѣдиться вычисленіемъ по таблицѣ, возрастаетъ вмѣстѣ съ q. Разъ такъ, то тó значеніе q, которое соотвѣтствуетъ $(t_1)_{min.}$, есть *наибольшее* возможное, при $t = (t_1)_{min.}$ значеніе этого угла $= q_{max.}$; но $\xi = \varphi_1 t_1 \operatorname{tg} q$ возрастаетъ, при данномъ t_1, вмѣстѣ съ q, и поэтому найдя, по аргументу $\log(t_1)_{min.}$, значеніе $q = q_{max.}$, мы получимъ $\xi_{max.} = \xi_0 = (\varphi_1)_{min.}\,(t_1)_{min.}\,\operatorname{tg} q_{max.}$. Такимъ образомъ нами вычислена таблица (165).

q max.	$\log(t_1)_{\min}$	$\log\xi_0$	$(z-q)$ max.	q max.	$\log(t_1)_{\min}$	$\log\xi_0$	$(z-q)$ max.
9^0	7.570—10	6.776—10	$0^0\ 2'.1$	18	8.418	7.981	$0^0\ 32'.9$
10	7.704	6.959	3.1	19	8.480	8.076	41.0
11	7.823	7.123	4.5	20	8.538	8.168	50.6
12	7.931	7.274	6.5	21	8.592	8.256	1^0 1.9
13	8.030	7.413	8.9	22	8.642	8.340	1 15.2
14	8.120	7.541	12.0	23	8.690	8.422	1 30.8
15	8.204	7.661	15.7	24	8.734	8.502	1 48.7
16	8.281	7.774	20.4	25	8.775	8.580	2 10.2
17	8.352	7.880	26.1	26	8.814	8.656	2 34.9

(165)

Таблица эта показываетъ, между прочимъ, что $z-q>2^0$ возможно лишь при $q>24^0$.

Въ таблицѣ I даются для ряда (E'), по аргументу $\log t_1 = \log t$, величины:

$$\log\varphi = \log\varphi_1\,; \quad \log\varphi' = \log(-E_1)\,; \quad \log\varphi'' = \log(E_2 + 0.89411\,E_3\,\xi_0^2)\,. \tag{166}$$

Такимъ образомъ

$$\log\operatorname{tg}(z-q) \approx \log(m\sin^4 q) + \log\varphi - \varphi'\,\xi^2 + \varphi''\,\xi^4\,, \tag{I}$$

гдѣ $\xi = (m\sin^4 q)\,\varphi$, величины же φ, φ', φ'' берутся изъ таблицы I по аргументу $\log t = \log(m\sin^4 q) - \log\operatorname{tg} q$.

Погрѣшность формулы (I) складывается: 1) изъ ошибки, которую мы дѣлаемъ, ограничиваясь въ (E) членами до шестого порядка, относительно ξ, включительно; 2) изъ ошибки отъ замѣны разложенія (E), доведеннаго до члена съ E_3 включительно, болѣе простой формулой (I). Послѣдняя ошибка, какъ слѣдуетъ изъ доказаннаго въ § 23, меньше $0.106\,E_3\,\xi^6$, и въ максимумѣ, при $\log t = 8.90$, $\xi_0 = 2^0\,0'.4$ достигаетъ $0.000\,0000\,178$; въ $\log\sin z$ отсюда возникаетъ ошибка $<0.000\,0000\,021$. — Что касается ошибки приближенной формулы (E'), то она можетъ сказаться, какъ сейчасъ увидимъ, лишь въ X-омъ знакѣ $\log\sin z$. Въ виду сходства между рядомъ (A) для $\log\sin(z-q)$ — для котораго мы аналитически доказали малость $|R_4|$ — и рядомъ (E) для $\log\operatorname{tg}(z-q)$, мы ограничиваемся тѣмъ, что покажемъ малость ошибки отъ отбрасыванія членовъ высшихъ порядковъ эмпирически, на рядѣ численныхъ примѣровъ.

Пусть m и q такъ подобраны, что $\log\xi = 8.510\,7633\,60$, при $\log t_1 = 7.70$, 8.20, 8.60, 8.70, 8.80, 8.85, 8.90. Соотвѣтственное значеніе $z-q \approx 1^0\,51'$ и близко, слѣдовательно, къ предѣльному. Вычисляемъ $\log\operatorname{tg}(z-q)$, съ одной стороны, по формулѣ (E'), съ другой стороны, — пользуясь строгимъ преобразованіемъ $\tau = t_1\cos^3(z-q)$, $\operatorname{tg}(z-q) = \varphi.\tau.\operatorname{tg} q$, гдѣ φ отыскивается по аргументу τ.

Мы приводимъ здѣсь сначала значенія вспомогательныхъ функцій, понадобившіяся намъ для этихъ выкладокъ.

	$\log\varphi_1$	$\log E_1$	$\log E_2$	$\log E_3$
$\log t_1 = 7.70$	0.008 8633 78	9.822 8075 9 n	0.376 47	1.1053 n
8.20	029 2004 53	9.843 8424 6 n	0.420 27	1.1720 n
8.60	081 4908 79	9.901 8165 5 n	0.542 30	1.3587 n
8.70	108 2706 78	9.934 0301 8 n	0.610 94	1.4643 n
8.80	147 4924 36	9.984 9555 6 n	0.720 68	1.6339 n
8.85	174 8432 39	0.023 5864 7 n	0.804 94	1.7647 n
8.90	210 9324 84	0.079 3647 4 n	0.928 18	1.9572 n

(167)

Для интерполяціоннаго опредѣленія $\log \varphi$, мы пользовались еще слѣдующими его значеніями:

$\log t_1$	$\log \varphi_1$	$\log t_1$	$\log \varphi_1$	$\log t_1$	$\log \varphi_1$	
7.698	0.008 8219 18	8.599	0.081 2667 99	8.848	0.173 6085 26	
7.699	008 8426 24	8.698	107 6356 15	8.849	174 2242 01	(168)
8.198	029 0579 48	8.699	107 9525 50	8.898	209 2583 68	
8.199	029 1291 08	8.798	146 5313 22	8.899	210 0925 45	
8.598	081 0434 54	8.799	147 0107 64			

Разности третьяго порядка $\log \varphi$ могутъ быть образованы читателемъ по „Основнымъ таблицамъ“.

Съ этими данными, мы получили ($\log \operatorname{tg} q$ вычисленъ какъ $\log \xi - \log \varphi_1 t_1$; τ соотвѣтствуетъ строгому значенію $\cos (z-q)$).

$\log t_1 =$	7.70	8.20	8.60	8.70	8.80	8.85	8.90	
$\log \xi$	8.510 7633 60	8.510 7633 60	8.510 7633 60	8.510 7633 60	8.510 7633 60	8.510 7633 60	8.510 7633 60	
$E_1 \xi^2$	— 6987 70	— 7334 48	— 8381 91	— 9027 28	— 1 0150 38	— 1 094 64	— 1 2615 12	
$E_2 \xi^4$	+ 26 27	+ 29 06	+ 38 49	+ 45 08	+ 58 04	+ 70 47	+ 93 59	
$E_3 \xi^6$	— 15	— 17	— 27	— 34	— 50	— 67	— 1 05	
$\Sigma \approx \log \operatorname{tg}(z-q)$	8.510 0672 02	8.510 0328 01	8.509 9289 91	8.509 8651 06	8.509 7540 76	8.509 6608 76	8.509 5111 02	(169)
$\log \tau$	7.699 3180 03	8.199 3181 11	8.599 3184 36	8.699 3186 37	8.799 3189 85	8.849 3192 77	8.899 3197 46	
$\log \varphi$	0.008 8492 18	0.029 1517 84	0.081 3380 74	0.108 0537 88	0.147 1641 67	0.174 4214 78	0.210 3604 81	
$\log \operatorname{tg} q$	0.801 8999 82	0.281 5629 07	9.829 2784 81	9.702 4926 82	9.563 2709 24	9.485 9201 21	9.399 8308 75	
$\Sigma = \log \operatorname{tg}(z-q)$	8.510 0672 03	8.510 0328 02	8.509 9289 91	8.509 8651 07	8.509 7540 76	8.509 6608 76	8.509 5111 02	

Сравнивая строгое значеніе $\log \operatorname{tg}(z-q)$ — въ 9-ой строкѣ таблицы (169), съ приближеннымъ, полученнымъ по формулѣ (E'), въ 5-ой строкѣ, мы замѣчаемъ полную ихъ тожественность въ предѣлахъ точности девятизначнаго вычисленія.

Сопоставляя результаты заключаемъ, что формула (I) даетъ $\log \sin z$ съ ошибкой, не превосходящей 2—3 единицъ IX-го десятичнаго знака. Такая величина ошибки возможна впрочемъ лишь въ исключительно рѣдкихъ случаяхъ.

Для бóльшей части таблицъ, вплоть до $\log t = 8.555$, членъ $\varphi'' \xi^4$ нечувствителенъ, и посему φ'' совсѣмъ въ нихъ не дано.

2. Согласно (H) имѣемъ

$$\log \sin z \approx \log \sin q + \log f_1 + \left(\frac{1}{4} A_1 x_1^2\right) \operatorname{tg}^2 q + \left(\frac{1}{4} A_2 x_1^4\right) \operatorname{tg}^4 q + \left(\frac{1}{4} A_3 x_1^6\right) \operatorname{tg}^6 q \qquad (H')$$

Въ нашей таблицѣ I даны, по аргументу $\log t_1 = \log t$, значенія величинъ $\log f$, $\log f'$, $\log f''$, гдѣ обозначено:

$$f = f_1 ; \qquad f' = -\frac{1}{4} A_1 x_1^2 ; \qquad f'' = \frac{1}{4} A_2 x_1^4 + \frac{1}{4} A_3 x_1^6 \times 0.89411 \xi_0^2 \ . \qquad (170)$$

Такимъ образомъ $\sin z$ опредѣляется изъ формулы

$$\log \sin z \approx \log (f \sin q) - f' \operatorname{tg}^2 q + f'' \operatorname{tg}^4 q \ . \qquad \textbf{(II)}$$

ξ_0 имѣетъ тоже значеніе, что и выше, см. § 24, начало.

Какова погрѣшность равенства (II)? Она слагается: 1) изъ ошибки формулы (H'); 2) изъ ошибки отъ замѣны (H') болѣе простой формулой (II). Изъ доказаннаго въ § 22 слѣдуетъ, что первая ошибка навѣрное меньше $0.022 |A_8| \xi^8 = 0.022 |A_8| x_1^6 \operatorname{tg}^6 q$ (см. форм. (158)). Выраженіе это въ maximum, при $\log t_1 = 8.90$, $\log \xi = 8.5445 - 10$, $\log A_8 = 2.0157_n$, меньше 0.000 0000 043; впрочемъ — судя, по вычисленіямъ, проведеннымъ нами для тѣхъ же значеній $\log t$ и q, при которыхъ мы изслѣдовали ошибку формулы I — дѣйствительный предѣлъ этой погрѣшности раза въ четыре меньше, и близокъ къ единицѣ IX-го десятичнаго знака.

Чтобы наглядно показать читателю степень приближенія формулы (H') и порядокъ величины разныхъ ея членовъ въ самыхъ невыгодныхъ условіяхъ, при большомъ ξ, составляемъ сначала слѣдующую таблицу.

	$\log f_1$	$\log \frac{1}{4} A_1$	$\log \frac{1}{4} A_2$	$\log \frac{1}{4} A_3$	
$\log t_1$ = 7.70	0.002 2158 446	9.343 4704 9 *n*—10	9.896 658	0.6253 *n*	
8.20	007 3001 132	9.359 4210 9 *n*	9.934 304	0.6854 *n*	
8.60	020 3727 197	9.404 3225 7 *n*	0.040 605	0.8552 *n*	
8.70	027 0676 695	9.429 8412 5 *n*	0.101 255	0.9523 *n*	(167*)
8.80	036 8731 090	9.470 9611 9 *n*	0.199 401	1.1096 *n*	
8.85	043 7108 099	9.502 7544 0 *n*	0.275 669	1.2320 *n*	
8.90	052 7331 211	9.549 5103 6 *n*	0.388 500	1.4136 *n*	

Мы принимаемъ, какъ выше, $\log \xi = 8.510\ 7633\ 60$; q будетъ слѣдовательно такимъ, что $\operatorname{tg} q = \xi : \varphi_1 t_1$. Это строгое уравненіе даетъ намъ q, изъ найденнаго же выше $\log \operatorname{tg}(z-q)$ получаемъ $z-q$. Отсюда можемъ вычислить строго и $\sin z$. Ту же величину получаемъ затѣмъ приближенно изъ (H'), замѣтивъ, что $x_1 \operatorname{tg} q = \xi$.

Табл. (169*).

$\log t_1$ =	7.70	8.20	8.60	8.70	8.80	8.85	8.90
$\log \operatorname{tg} q$	0.801 8999 82	0.281 5629 07	9.829 2724 81	9.702 4926 82	9.563 2709 24	9.485 9201 21	9.399 8308 75
q	$81^0 01' 58''.12049$	$62^0 23' 38''.15675$	$34^0 01' 02''.76834$	$26^0 45' 05''.03807$	$20^0 05' 37''.24230$	$17^0 01' 17''.20788$	$14^0 05' 42''.18918$
$z-q$	1 51 13.30186	1 51 12.77365	1 51 11.17995	1 51 10.19938	1 51 8.49549	1 51 7.06558	1 51 4.76832
z	82 53 11.42235	64 14 50.93040	35 52 13.94829	28 36 15.23745	21 56 45.73779	18 52 24.27346	15 56 46.95750
$\log \sin z$	9.996 6442 171	9.954 5701 024	9.767 8648 528	9.680 1148 792	9.572 5616 752	9.509 8451 647	9.438 9180 902
$\log f_1 \sin q$	9.996 8750 897	9.954 8095 660	9.768 1302 419	9.680 3962 229	9.572 8707 475	9.510 1775 128	9.439 2878 423
$\frac{1}{4} A_1 \xi^2$	— 2317 380	— 2404 074	— 2665 933	— 2827 274	— 3108 049	— 3344 114	— 3724 235
$\frac{1}{4} A_2 \xi^4$	+ 8 704	+ 9 492	+ 12 124	+ 13 941	+ 17 476	+ 20 832	+ 27 012
$\frac{1}{4} A_3 \xi^6$	— 49	— 56	— 83	— 104	— 149	— 198	— 301
$\log \sin z \approx$	9.996 6442 172	9.954 5701 022	9.767 8648 527	9.680 1148 792	9.572 5616 753	9.509 8451 648	9.438 9180 899

Сличая $\log \sin z$, вычисленный по приближенной формулѣ (H') и находящійся въ послѣдней строкѣ, со значеніемъ $\log \sin z$ по 5-ой строкѣ, замѣчаемъ мелкія разногласія лишь въ X-омъ десятичномъ знакѣ; при этомъ $z-q$ имѣетъ уже весьма большія значенія, врядъ ли когда либо могущія встрѣтиться въ астрономической практикѣ.

Что касается второй ошибки (II), то она, согласно (164), меньше 0.106 послѣдняго члена въ (H'), т.-е. меньше 0.000 0000 051. Въ общемъ, слѣдовательно, ошибка формулы (II) навѣрное не достигаетъ одной единицы VIII-го знака, въ предположеніи, конечно, что $z-q \leqslant 2$, $\log t_1 \leqslant 8.90$.

Формула (II) оказывается, такимъ образомъ, нѣсколько менѣе точной, чѣмъ (I), но практически, вплоть до семизначнаго вычисленія z, разница эта незамѣтна, въ виду высокой точности обоихъ выраженій. По сравненію съ (I), формула (II) менѣе удобна тѣмъ, что, для полученія результата равной точности, она требуетъ вычисленія правой части съ бо́льшимъ числомъ знаковъ. Кромѣ того, коэффиціенты f' и f'' мѣняются значительно быстрѣе, чѣмъ φ' и φ'', что затрудняетъ интерполированіе. Зато формула (II) даетъ прямо значеніе основной неизвѣстной, $\log \sin z$, при вычисленіяхъ же съ мéньшимъ количествомъ знаковъ, напримѣръ съ 5-ю или 6-ю, интерполированіе почти такъ же просто, какъ въ случаѣ употребленія (I).

Можно еще замѣтить, что, вообще говоря, ошибки отъ неизбѣжныхъ вычислительныхъ закругленій менѣе вліяють на неизвѣстное z при вычисленіи по формулѣ (I), даже если вычисленіе по (I) ведется съ однимъ десятичнымъ знакомъ меньше.

3. Мы остановились дальше на разложеніи (*EE*). Въ нашей таблицѣ I обозначено

$$-2E_1:3M=1+\varkappa, \qquad \left(\varkappa=\frac{d\log\varphi}{d\log t}\right) \quad , \tag{171}$$

— сообразно съ обозначеніями въ нашей статьѣ [16] въ *Изв. Имп. Акад. Наукъ*, гдѣ указано было равенство (безъ δ_1):

$$\log\operatorname{tg}(z-q) = \log\operatorname{tg}\eta+3(1+\varkappa)\log\cos\eta+\delta_1 \quad , \tag{III}$$

причемъ положено:

$$\operatorname{tg}\eta=\xi=\varphi_1 t_1\operatorname{tg}q \quad . \tag{172}$$

Дополнительный членъ δ_1 дается нашей таблицей III въ функціи $\log t$ и η. Онъ вычисленъ по формулѣ, см. (*EE*):

$$\delta_1=\left(E_2+\frac{1}{2}E_1\right)\operatorname{tg}^4\eta+\left(E_3-\frac{1}{3}E_1\right)\operatorname{tg}^6\eta \quad . \tag{173}$$

Формула (III), съ остаткомъ по (173), точнѣе (I) и (II), потому что въ ней приняты цѣликомъ члены шестого порядка.

4. При томъ же опредѣленіи (172) функціи η, имѣемъ, согласно (*G*):

$$z-q \approx \eta+G_1\operatorname{tg}^3\eta+\delta_2 \quad . \tag{IV}$$

Въ нашей I-ой таблицѣ положено

$$G_1=-\psi \quad , \tag{174}$$

причемъ ψ выражено въ секундахъ дуги. Дополнительный членъ δ_2 былъ нами вычисленъ по формулѣ:

$$\delta_2=G_2\operatorname{tg}^5\eta+G_3\operatorname{tg}^7\eta \quad ; \tag{175}$$

онъ данъ въ таблицѣ IV въ функціи $\log t$ и η (табл. IV *A*), и въ функціи $\log t$ и q (табл. IV *B*).

Логариѳмы коэффиціентовъ G''_2 и G''_3, выраженныхъ въ секундахъ дуги, суть:

$\log t$	$\log G''_2$	G''_3	$\log t$	$\log G''_2$	$\log G''_3$	
8.40	6.30490	7.1231_n	8.80	6.53976	7.4893_n	
8.50	6.33482	$7\ 1695_n$	8.85	6.61721	7.6112_n	(176)
8.60	6.37699	7.2350_n	8.90	6.73109	7.7913_n	
8.70	6.43943	7.3322_n				

Какъ наглядно видно изъ таблицы IV*B*, въ обычныхъ случаяхъ δ_2 практически есть нуль. Замѣтимъ, что отбрасывая δ_1 въ (III), мы дѣлаемъ ошибку, равную приблизительно ²/₃ ошибки отъ отбрасыванія δ_2 въ (IV).

Формула (IV), какъ и (III) — въ отличіе отъ I) и (II) — точна до малыхъ порядка ξ^6 *включительно*.

Для численной провѣрки формулъ (III) и (IV) мы беремъ крайній примѣръ: $\log t_1 = 8.90$, $\log \xi = 8.510\,7633\,60$.

$$3(1+\varkappa) = -2E_1 : M = 5.528\,5396 \qquad \eta = 1^0\,51'24'' \qquad \log\cos\eta = \quad 0.000\,2280\,620.$$

$\log \xi$	8.510 7633 600
$3(1+\varkappa)\log\cos\eta$	— 1 2608 498
$(E_2 + \frac{1}{2}E_1)\,\mathrm{tg}^4\eta$	+ 86 962
$(E_3 - \frac{1}{3}E_1)\,\mathrm{tg}^6\eta$	— 1 046
по форм. III $\log\mathrm{tg}(z-q) \approx$	8.509 5111 02

Это значеніе $\log\mathrm{tg}(z-q)$ вплоть до послѣдняго знака согласно съ вышенайденнымъ, см. стр. **1.**40.

Находимъ еще:

$$\log G_1'' = 5.756\,00558_n \qquad \log G_2'' = 6.731\,0881 \qquad \log G_3'' = 7.791\,337_n$$

η	$1^0\,51'24''.000\,000$
$G_1\,\mathrm{tg}^3\eta$	— 19.422 078
$G_2\,\mathrm{tg}^5\eta$	+ 0.192 710
$G_3\,\mathrm{tg}^7\eta$	— 0.002 326
по форм. (IV) $z-q \approx$	$1^0\,51'\,4''.768\,31$

Это значеніе $z-q$ отличается всего на $0''.00001$ отъ вышенайденнаго, стр. **1.**41.

§ 25. Намъ уже остается только описать способъ составленія нашихъ „Основныхъ Таблицъ". Мы стремились къ тому, чтобы послѣдній знакъ былъ всюду вѣренъ и поэтому, какъ общее правило, вычисляли всѣ величины съ числомъ знаковъ, на 2 большимъ числа знаковъ въ таблицахъ. При такомъ методѣ вычисленій ошибки въ табличныхъ величинахъ весьма мало вѣроятны. Что же касается главныхъ функцій, $\log\varphi$ и $\log f$ (послѣдняя была вычислена лишь съ 8-ью знаками), то были отдѣльно разсмотрѣны всѣ случаи, въ которыхъ можно было опасаться при закругленіи ошибки больше 0.5 послѣдняго оставляемаго знака. Такимъ образомъ $\log\varphi$ и $\log f$ должны быть постольку точны, поскольку это вообще возможно при данномъ числѣ знаковъ.

Для вычисленія φ и f представлялись разные пути. Во-первыхъ, уравненія

$$\varphi = (1+\varphi t)^4 \quad (177) \qquad\qquad f - t f^4 = 1\,, \quad (178)$$

которыми φ и f опредѣляются въ функціи t, суть уравненія четвертой степени относительно $\varphi^{1/4} = f$ и поэтому можно выразить изъ нихъ f явно черезъ t въ конечномъ видѣ. Однако формулы, получаемыя при этомъ, практически слишкомъ сложны. — Во-вторыхъ, ур. (178) разрѣшается строкой Лагранжа

$$\frac{1}{M}\log f = t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{11.10}{2.3}t^3 + \frac{15.14.13}{2.3.4}t^4 + \frac{19.18.17.16}{2.3.4.5.}t^5 + \ldots, \quad (179)$$

причемъ $\log\varphi$ можно бы найти, какъ $4\log f$; но сходимость строки (179) неважная. — Въ-третьихъ: t выражается весьма просто черезъ f

$$t = \frac{f-1}{f^4}\,; \quad (180)$$

составить таблицу t въ функціи f нетрудно, послѣ же остается лишь обратить ее. Къ сожалѣнію, до сихъ поръ не составлены, болѣе чѣмъ съ семью десятичными, „таблицы логариѳмовъ вычитанія", на подобіе таблицъ Zech'а. Первоначально [16] мы и примѣнили формулу (180) для вычисленія t для 180 значеній $\log\varphi$ отъ 0.001 до 0.180.

Мы остановились на методѣ вычисленія $\log\varphi$ помощью пробъ. Полагая въ (177) $\varphi = \sec^8 \alpha$, имѣемъ

$$\sin\alpha\cos^3\alpha = \sqrt{t}\ . \tag{181}$$

Найдя пробами значеніе α для трехъ равноотстоящихъ значеній $\log t$, напримѣръ для $\log t = 8.60$, 8.61, 8.62, мы опредѣляли экстраполированіемъ, въ какомъ десяткѣ секундъ заключенъ уголъ α для слѣдующаго значенія $\log t$, напр. $\log t = 8.63$; послѣ этого для двухъ различающихся на $10''$ значеній α, содержащихъ цѣлое число десятковъ секундъ и охватывающихъ найденное α, мы вычисляли $\log(\sin\alpha\cos^3\alpha : \sqrt{t})$. Интерполированіемъ находилось значеніе α, обращающее въ нуль послѣдній логариѳмъ, и потомъ $\log f = 2\log\sec\alpha$, $\log\varphi = 8\log\sec\alpha$. Для полученія 8-го знака въ $\log\ \varphi$ необходимо было употреблять 9-и значные логариѳмы тригонометрическихъ функцій.

Этимъ пріемомъ были вычислены $\log f$ и $\log\varphi$ для 90 значеній $\log t$ между $\log t = 7.60$ и 8.50 (черезъ 0.01), для 72 значеній между 8.50 и 8.86 (черезъ 0.005) и для 140 значеній (черезъ 0.001) $\log t$ между 8.86 и 9.000. Вычисленія произведены помощью десятизначнаго *Thesaurus logarithmorum* [32], причемъ однако десятый знакъ — за исключеніемъ послѣдняго интервала для $\log t$ — во вниманіе не принимался. При нахожденіи значеній угла α, обращающихъ въ нуль $\log(\sin\alpha\cos^3\alpha : \sqrt{t})$, необходимо было, для большихъ значеній $\log t$, принимать во вниманіе разности второго порядка логариѳмовъ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$: 10-и секундные интервалы *Thesaurus*'а слишкомъ велики.

Остальныя значенія $\log\varphi$ найдены интерполированіемъ, и такимъ образомъ получена *восьми*значная таблица $\log\varphi$ для $\log t$ отъ 7.600 до 8.860, черезъ 0.001; для $\log\ t$ отъ 8.860 до 9.000 всѣ значенія $\log\varphi$ (и $\log f$) имѣлись на-лицо съ девятью знаками и интерполировать не пришлось. Правильность таблицы провѣрена по разностямъ. Послѣ этого составлена *восьми*значная таблица $\log f$ (въ интервалѣ отъ $\log t$ 7.60 до 8.86) умноженіемъ на 0.25 исходнаго значенія $\log\varphi$ и послѣдовательнымъ прибавленіемъ $^1/_4$ разности между сосѣдними значеніями $\log\varphi$. Такъ какъ $\log f$ дается въ нашихъ таблицахъ лишь съ *однимъ* знакомъ меньше, то, для обезпеченія корректности послѣдняго знака, пришлось продѣлать для многихъ значеній $\log t$ спеціальныя вычисленія. Состояли они въ томъ, что, для значеній $\log f$ съ цифрой 5 на восьмомъ мѣстѣ (а также $4+$ или $6-$), вычислялся $\log t$ по (180), причемъ употреблялись десятизначные логариѳмы чиселъ. Послѣ этого седьмая цифра $\log t$ увеличивалась на единицу или оставлялась прежней, въ зависимости отъ того, получалось ли для $\log t$ значеніе ...99... или ...001... . Подобнымъ образомъ установлены были въ возбуждающихъ сомнѣніе случаяхъ истинныя значенія $\log\varphi$.

Въ этихъ работахъ принялъ участіе студентъ г. Э. Свенсонъ, вычислившій независимо отъ насъ $\log\varphi$ для 200 значеній $\log t$ между 8.100 и 8.300; кромѣ того, г. Свенсонъ перевычислилъ, также независимо, 25 сомнительныхъ значеній $\log\varphi$.

Логариѳмъ φ данъ въ нашихъ Таблицахъ, предназначенныхъ для *семи*значнаго опредѣленія орбиты, сначала лишь съ 5-ю знаками вплоть до $\log t = 7.950$, потомъ съ 6-ью — вплоть до $\log t = 8.860$, и только для болѣе высокихъ значеній $\log t$ — съ 7-ю знаками. Такая экономія въ числѣ десятичныхъ возможна благодаря тому, что ошибка въ логариѳмѣ φ входитъ въ $\log\sin z$ съ малымъ факторомъ, меньшимъ tf^3 (см. § 11). Логариѳмъ же f данъ однообразно съ семью десятичными.

Что касается до коэффиціентовъ E_1, E_2, A_1, A_2, то ихъ простыя выраженія въ функціи $x_1=\varphi_1 t_1$ не были извѣстны ко времени составленія таблицъ, и они находились по нижеслѣдующимъ формуламъ, въ которыя входятъ $\varkappa=\frac{d\log\varphi}{d\log t}$ и $\frac{d\varkappa}{dt}$ (пишемъ всюду t вмѣсто t_1; всѣ функціи t предполагаются вычисленными для $t=t_1$):

$$E_1=-\frac{3}{2}M(1+\varkappa) \qquad E_2=\frac{3}{2}M\left\{\frac{1}{2}(1+\varkappa)+3(1+\varkappa)^2+\frac{3}{4}\varkappa\frac{d\log\varkappa}{d\log t}\right\}$$

$$\frac{1}{4}A_1x_1^2=-\frac{M}{8}\varphi t\varkappa \qquad \frac{1}{4}A_2x_1^4=-\frac{1}{16}A_1\varphi^3t^3\left\{\frac{d\log\varkappa}{d\log t}-1+7\varphi t+6\varphi t\varkappa\right\} \tag{182}$$

Пользуясь формулами

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{4f^8}{4-3f} \qquad \varkappa=\frac{d\log\varphi}{d\log t}=4\,\frac{f-1}{4-3f} \qquad \frac{d\varkappa}{dt}=\frac{4f^5}{(4-3f)^3} \tag{183}$$

читатель перейдетъ безъ труда отъ (182) къ (133*) и (129).

Величины $\varkappa$ и $\frac{d\log\varkappa}{d\log t}$, входящія въ (182), вычислены были *механическимъ дифференцированіемъ* таблицъ $\log\varphi$, что оказалось возможнымъ благодаря большому числу десятичныхъ знаковъ, съ которымъ имѣлись значенія этой основной функціи.

Вмѣсто опредѣленія коэффиціентовъ E_3, A_3, входящихъ въ выраженія (166) и (170) для φ'' и f'', вычислены были близкіе къ единицѣ факторы $\varkappa_e$ и $\varkappa_a$, такіе, что отъ подстановки $\varkappa_e E_2$ и $\varkappa_a A_2$ вмѣсто E_2 и A_2 въ приближенныя равенства:

$$\log\operatorname{tg}(z-q)\approx\log\xi+E_1\xi^2+E_2\xi^4 \qquad \log\sin z\approx\log(f_1\sin q)+\left(\frac{1}{4}A_1x_1^2\right)\operatorname{tg}^2q+\left(\frac{1}{4}A_2x_1^4\right)\operatorname{tg}^4q$$

лѣвыя ихъ части строго равнялись правымъ при значеніи $\xi=\xi_1$, причемъ

$$\xi_1=\xi_0\left\{\frac{3}{2}[(1+\sqrt{2})^{1/3}+(1-\sqrt{2})^{1/3}]\right\}^{1/2}. \tag{184}$$

относительно ξ_0 см. табл. (165).

Послѣ этого принято:

$$\varphi''=\varkappa_e E_2 \qquad f''=\varkappa_a\left(\frac{1}{4}A_2x_1^4\right). \tag{185}$$

Значенія эти для φ'' и f'' тожественны съ (166) и (170), если пренебречь погрѣшностями формулъ (E') и (H') при $\xi=\xi_1$ (см. § 23, конецъ).

Факторы $\varkappa_e$ и $\varkappa_a$ были найдены путемъ девятизначнаго вычисленія $\log\operatorname{tg}(z-q)$ и десятизначнаго — $\log\sin z$, для $\log\xi=8.510763360$ (см. § 24, табл. (169, 169*)).

Мы нашли

$\log t_1$	$\log\varkappa_e$	$\log\varkappa_a$	$\log t_1$	$\log\varkappa_e$	$\log\varkappa_a$
7.70	—0.0023	—0.0025	8.80	—0.00376	—0.00374
8.20	24	25	8.85	414	417
8.60	30	30	8.90	—0.00485	—0.00482
8.70	—0.0032	—0.0032			

Найденные такимъ образомъ логариѳмы $\varkappa_e$ и $\varkappa_a$ (точнѣе — значенія $(1-\varkappa_e)$ и $(1-\varkappa_a)$) были умножены — въ виду $b=a\xi_1^2$, см. § 23, конецъ — на $(\xi_1:[8.510\,7633\,60])^2$, для приведенія ихъ къ значенію $\xi=\xi_1$.

Число знаковъ $\log\varphi'$, $\log\varphi''$, $\log f'$, $\log f''$ дано въ „Таблицахъ“ — вообще говоря — съ такимъ расчетомъ, чтобы ошибка на одну единицу послѣдняго оставленнаго въ этихъ коэффиціентахъ десятизначнаго знака, производила въ $\log\sin z$ ошибку <0.2 VII-го знака. Такъ, напримѣръ, $\log\varphi'$ данъ для $\log t = 8.075$ съ однимъ знакомъ, для $\log t = 8.080$ — уже съ двумя. Для послѣдняго значенія $\log t$, — $\log\xi_0 = 7.484-10$, логариѳмъ максимальнаго значенія $\varphi'\xi_0^2$ есть $4.81-10$, и логариѳмъ поправки $\log\sin z_1$, въ зависимости отъ члена $\varphi'\xi_0^2$ меньше $tf^3 \times \varphi'\xi_0^2 < 2.91-10$, и (поправка $\log\sin z) < 0.000\,0000\,81$; при измѣненіи $\log\varphi'$ на 0.1 эта поправка измѣнится на $\frac{1}{10\,M}$ долю, т.-е. на величину, почти достигающую 2 единицъ VIII-го знака. Для слѣдующаго значенія $\log\varphi'$ соотвѣтственная поправка измѣнилась бы отъ неточности $\log\varphi'$ уже болѣе, чѣмъ на 0.000 0000 2, отчего и сдѣланъ въ этомъ мѣстѣ переходъ къ бо́льшему числу знаковъ. — Замѣтимъ, что ошибка въ интерполированномъ значеніи табличной величины лишь въ исключительномъ случаѣ можетъ возрасти до полной единицы послѣдняго мѣста, и что ошибка въ 0.2 VII знака возможна лишь при предѣльномъ значеніи ξ. —

Что касается до величинъ $1+\varkappa$ и $\log\psi$, то первая изъ нихъ вычислена, какъ уже сказано, механическимъ дифференцированіемъ, послѣ чего получена и вторая по формулѣ

$$\psi = \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sin 1''}(1+\varkappa)\ . \qquad (186)$$

Величины эти даны однообразно съ 4-мя знаками.

Остаточные члены δ_1 и δ_2 вычислены по формуламъ (173) и (175).

Табличныя разности въ I-ой таблицѣ были провѣрены въ корректурныхъ листахъ на ариѳмометрѣ студентомъ К. В. Купфферомъ.

Мы производили всѣ вычисленія, поскольку позволялъ это характеръ формулъ, при помощи счетной машины; въ нашемъ распоряженіи имѣлся новый, безукоризненно дѣйствующій, ариѳмометръ Однера № 20742.

Дополненія и примѣчанія.

Къ § 2, стр. 1.3. — Radau [29] указалъ способъ графическаго рѣшенія уравненія Гаусса помощью семьи прямыхъ линій. Переписываемъ (1) въ видѣ

$$X + Y\operatorname{ctg} z = \sin^3 z \qquad (187) \qquad , \text{причемъ } X = \frac{\cos q}{m} \quad Y = \frac{\sin q}{m} \qquad (188)$$

Считая z параметромъ, можно разсматривать (187), какъ уравненіе семейства прямыхъ въ Декартовыхъ координатахъ. Пусть семейство (187) вычерчено, причемъ прямыя помѣчены принадлежащими имъ значеніями z. Построивъ на координатной плоскости точку M съ координатами X и Y по уравненіямъ (188), мы получимъ z, какъ помѣтку прямой, проходящей черезъ M. Radau [l. c.] даетъ графикъ прямыхъ (187), причемъ z мѣняетъ черезъ 5^0.

По простотѣ идеи рѣшеніе Radau весьма замѣчательно, но въ нормальномъ случаѣ планетной орбиты его графикъ совершенно непригоденъ. При обычныхъ условіяхъ X и Y малы, будучи величинами порядка $t_1^{-1}\sin^3 q$ и $t_1^{-1}\sin^4 q$; такимъ образомъ для нахожденія z приходилось бы пользоваться лишь маленькой частью діаграммы, гдѣ на небольшомъ пространствѣ помѣщается много прямыхъ семейства, вслѣдствіе чего z могло бы быть получено лишь ненадежно. Этотъ недостатокъ способа имѣетъ органическій характеръ — онъ не устраняется увеличеніемъ масштаба чертежа. Дѣло въ томъ, что разстояніе, въ области точки M, двухъ смежныхъ прямыхъ семейства есть величина порядка $t_1^{-1}\sin^2 q\,.\,dz$, и, слѣдовательно, въ какомъ масштабѣ мы бы ни начертили діаграмму, точность опредѣленія z безпредѣльно убываетъ по мѣрѣ уменьшенія q. Нельзя поэтому удивляться, что діаграмма Radau мало извѣстна; болѣе странно то обстоятельство, что никѣмъ не было сдѣлано попытки примѣнить идеи Lalanne'а, лежащія въ основѣ графика Radau, къ болѣе цѣлесообразному рѣшенію уравненія Гаусса.

Къ § 2, стр. 1. 3. — Для перехода отъ значенія z, полученнаго по (6), къ болѣе точному z_1, Виттъ [l. c.] указываетъ формулу $\log\sin(z_1 - q) = \log\sin(z - q) - 4(1 - 3t_1\varphi)^{-1}\log\sec(z - q)$, „которая даже въ очень неблагопріятныхъ случаяхъ даетъ значеніе $z_1 - q$, согласное съ истиннымъ въ предѣлахъ $1''$."

Къ § 2, стр. 1. 3. — Попытку аналитическаго рѣшенія уравненія (1) дѣлаетъ Вильевъ [33], вычислившій первые пять коэффиціентовъ разложенія $z - q$ по степенямъ m. Вслѣдствіе медленной сходимости строка Вильева практическаго интереса не представляетъ. Мы сопоставляемъ здѣсь, для данныхъ численнаго примѣра Вильева, значенія первыхъ членовъ его ряда для $z - q$, со значеніями первыхъ членовъ нашей строки (G) § 18, дающей ту же величину.

Данныя: $m = [1.30455]$, $q = 5^0 56' 14''$. Находимъ: $t_1 = [8.346\,264 - 10]$, $\varphi_1 t_1 = [8.388\,222 - 10]$, $\mathrm{tg}\,\eta = [7.405\,241 - 10]$, $G_1'' = [5.53409_n]$, $G_2'' = [6.2923]$, $G_3'' = [7.104_n]$.

Вильевъ

Членъ съ m	$+476''.11$
„ „ m^2	$+\ 42.27$
„ „ m^3	$+\ 5.15$
„ „ m^4	$+\ 0.74$
„ „ m^5	$+\ 0.09$
$z - q =$	$+524''.4$

Банахевичъ

η	$+524''.403$ ... ...
членъ съ $\mathrm{tg}^3\eta$	$-0.005\ 621$ ... ...
„ „ $\mathrm{tg}^5\eta$	$+0.000\ 000\ 208$ ...
„ „ $\mathrm{tg}^7\eta$	$-0.000\ 000\ 000\ 009$
$z - q =$	$+524''.40$

Мы видимъ отсюда, насколько скорѣе сходится второе разложеніе; такъ, напримѣръ, четвертый его членъ въ 8.10^{10} разъ меньше, чѣмъ въ первомъ.

Къ § 5, стр. 1. 5. — Уже самому Лагранжу былъ извѣстенъ [8, II mém., № 14], переходъ отъ теоремы Ламберта къ уравненію восьмой степени. Хотя степень этого уравненія не можетъ быть понижена болѣе чѣмъ на единицу, то тѣмъ не менѣе критическія замѣчанія Лагранжа, по поводу уравненія *шестой* степени Boskowicz'а (приписываемаго Лагранжемъ Ламберту) основаны, какъ выяснимъ въ другомъ мѣстѣ, на недоразумѣніи: уравненія Босковича и Лагранжа относятся къ разнымъ проблемамъ.

Къ § 5, стр. 1. 9. — Раздѣляя обѣ стороны уравненія (21) на μ^2, получаемъ:

$$1 = f^2 + f^8\frac{l^2}{\mu^8} - 2f^5\frac{l}{\mu^4}\cos q\,, \tag{189}$$

гдѣ положено, какъ всегда, $f = \mu : r = \sin z : \sin q$.

Полагая

$$X = l\cos q : \mu^4\,,\quad Y = l^2 : \mu^8 \qquad a = (f^2 - 1) : 2f^5 \qquad b = -(f^2 - 1) : f^8 \tag{190}$$

можемъ написать уравненіе (189) въ видѣ:

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1\,. \tag{191}$$

Считая f перемѣннымъ параметромъ, можемъ разсматривать (191), какъ уравненіе семейства прямыхъ, заданныхъ своими отрѣзками a и b на осяхъ координатъ. Если семейство (191) вычерчено, то построивъ точку M, съ координатами X и Y, найдемъ f, какъ помѣтку прямой, проходящей черезъ M. Практичнѣе помѣтить прямыя семейства (191) значеніями $\log f^4$.

Мы приводимъ здѣсь данныя, по которымъ легко построить семейство прямыхъ (191) для случаевъ, встрѣчающихся при опредѣленіи планетной орбиты. Въ таблицѣ мы даемъ значеніе a, и, вмѣсто b, абсциссу $= a - \frac{1}{10}(a:b)$ точки, въ которой прямая семейства пересѣкаетъ линію $Y = 0.1$. Достаточно строить части прямыхъ, заключенныя въ четырехугольникѣ $X = 0$, $X = 0.1$, $Y = 0$, $Y = 0.02$.

$\log f^4$	a	$a - \frac{1}{10}(a:b)$	$\log f^4$	a	$a - \frac{1}{10}(a:b)$	$\log f^4$	a	$a - \frac{1}{10}(a:b)$
0.00	0.0000	0.0500	0.13	0.0555	0.1181	0.25	0.0812	0.1582
.01	0056	0565	.14	0584	1221	.26	0826	1609
.02	0110	0628	.15	0612	1260	.27	0838	1635
.03	0161	0688	.16	0638	1297	.28	0850	1660
.04	0210	0746	.17	0663	1333	.29	0860	1685
.05	0257	0802	.18	0686	1368	.30	0870	1709
.06	0301	0855	.19	0708	1402	.31	0879	1733
.07	0343	0907	.20	0728	1434	.32	0887	1756
.08	0383	0957	.21	0747	1466	.33	0894	1778
.09	0421	1005	.22	0765	1496	.34	0900	1800
.10	0457	1052	.23	0782	1526	.35	0906	1821
.11	0492	1096	.24	0.0798	0.1554	.36	0.0911	0.1842
.12	0.0524	0.1140						

Другія выраженія X и Y суть, по (190) и (G_4) § 8: $X = t_1$ $\quad Y = (t_1 \sec q)^2$. Чтобы воспользоваться для рѣшенія уравненія Гаусса графикомъ прямыхъ (191), строятъ точку M $(t_1\,,\ t_1{}^2 \sec^2 q)$, отсчитываютъ $\log f^4$, и послѣ этого вычисляютъ z изъ соотношенія (G_4)

$$\sin(z - q) = f^4\,(m \sin^4 q) \quad .$$

При длинѣ графика лишь въ 10 сантиметровъ, высотѣ 2 сантиметра, третій знакъ въ $\sin z$ получается строго, причемъ въ обычныхъ случаяхъ, при умѣренныхъ t_1, легко такимъ образомъ получить и четвертый знакъ. Высокая точность рѣшенія обусловливается выгодной трансформаціей и малостью угла $z - q$ противъ z. Въ смыслѣ точности и простоты графическаго рѣшенія дальше, пожалуй, итти некуда.

Уравненіе (189) могло бы послужить отправнымъ пунктомъ для нашихъ рядовъ, напримѣръ для разложенія f по степенямъ $\operatorname{tg}^2 q$.

Къ § 16, стр. 1. 29. — Сходимость разложенія $H(f)$ по степенямъ β, т.-е. по степенямъ ξ^2, мы могли бы изслѣдовать проще, чѣмъ это мы сдѣлали въ § 13, разсматривая f какъ функцію комплексной перемѣнной β, опредѣленную двумя условіями: 1) .... $f = f_1$ при $\beta = 0$, 2) .... $df : d\beta = 1 : G'$. Для этого, согласно фундаментальной теоремѣ Коши, достаточно было бы изслѣдовать разстояніе точки $f = f_1$ отъ ближайшей нулевой точки функціи G'. Между прочимъ нетрудно было бы такимъ образомъ убѣдиться, основываясь на выведенномъ въ § 9 неравенствѣ $|\log(t_1 : \tau')| < 0.015$, что ряды наши сходятся при любомъ положеніи планеты внутри области (28, 29). Такой методъ не далъ бы, однако, никакихъ указаній относительно величины остаточнаго члена.

Къ § 18, стр. 1. 31. — Въ *Изв. Пулк. Обсерв.*, № 78, мы даемъ, безъ вывода, слѣдующую формулу:

$$z - q \approx \xi + J_1\,\xi^3 + J_2\,\xi^5 \tag{192}$$

гдѣ

$$J_1 = -\frac{1}{6}\,\frac{11 + 3x_1}{1 - 3x_1}\,,\quad J_2 = \frac{1}{40}\,\frac{323 - 567\,x_1 - 459\,x_1{}^2 - 81\,x_1{}^3}{(1 - 3\,x_1)^3} \quad . \tag{193}$$

Указатель литературы.

[1] Gauss, *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburgi 1809; цит. по изд. 1906 г.

[2] Charlier, *Die analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems*, Arkiv för Matem. Astron. och Fysik, B. 7, (1911): I (№ 5), II (№ 10), III (№ 16). — Также въ Meddel. från Lunds Astron. Observ. №№ 45, 46.

[3] Bauschinger, *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Leipzig, 1906.

[4] Herglotz, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Encykl. d. math. Wiss., B. VI_2, 1910 г.

[5] Ивановъ, *Основной курсъ теоретической астрономіи*, Петроградъ 1915 г.

[6] Pizzetti, *Tabelle grafiche per la risoluzione approssimata di una equatione di Gauss che si incontre nel calcolo delle orbite*; цит. по реф. въ **AJB 12** (1910 г.).

[7] Tisserand, *Leçons sur la détermination des orbites*, réd. p. Perchot, Paris 1899.

[8] De La Grange, *Sur le problème de la détermination des orbites des Cometes d'après trois observations*, I mémoire (Paris, 1778), II mémoire (1778), III mémoire (1783).

[9] Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Paris an VII, Tome premier, livre II.

[10] Lambert, *Observations sur l'orbite apparente des comètes* (1771); Ostw. Klass. № 133.

[11] Bruns, *Der Lambert'sche Satz*, Astr. Nachr. **118**, № 16.

[12] Фогель, *Опредѣленіе элементовъ орбитъ по тремъ наблюденіямъ*, Кіевъ, 1891.

[13] Encke, *Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen*. (1851 г.); Ostw. Klass. № 141.

[14] Witt, *Zur numerischen Auflösung zweier Gleichungen in der Planetentheorie*, Astr. Nachr. **172**, № 9.

[15] Орловъ, *Сведеніе вопроса объ опредѣленіи эллиптической орбиты къ рѣшенію уравненія четвертой степени* $y - y^4 = a$, Изв. Имп. Ак. Н., 1915 г., № 17.

[16] Banachiewicz, *Sur la résolution de l'équation de Gauss dans la détermination d'une orbite planétaire*, Изв. Имп. Ак. Н., 1916 г., № 9.

[17] Oppolzer, *Traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes*, publ. par Pasquier, Paris 1886.

[18] Klinkerfues, *Theoretische Astronomie*, Neubearb. von Buchholz, III Ausg., Braunschweig 1912.

[19] Charlier, *Die Lagrange'sche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem*, Meddel. från Lunds Astr. Observ., Ser. II, № 7.

[20] Mello e Simas, *Éléments définitifs de l'orbite de la Comète 1910 a*, Astr. Nachr. **192**, № 21.

[21] Charlier, *On multiple solutions in the determination of orbits from three observations*, M. N. **71**.

[22] Bauschinger, *Tafeln zur theoretischen Astronomie*, Leipzig, 1901.

[23] Lehmann-Filhès, Astr. Nachr. **98**, № 20.

[24] Sidler, Astr. Nachr. **99**, № 9.

[25] Kopff, *Bemerkung zur Diskussion d. Gauss'schen Gleichung*, Astr. Nachr. **195**, № 1.

[26] Яковкинъ, *Опредѣленіе разстояній планетъ по тремъ наблюденіямъ*, Изв. Р. Астр. Общ., XVIII вып., С.-Петербургъ, 1913.

[27] Wronski, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, Paris, 1812.

[28] Żorawski, *O szeregach odwracających*, Prace mat.-fiz, T. V.

[29] Radau, *Sur la détermination des orbites*, Bull. astr., T. II.

[30] Banachiewicz, *Tables auxiliaires pour la résolution de l'équation de Gauss à 6 décimales*, Paris, 1916.

[31] Банахевичъ, *Основныя таблицы для рѣшенія уравненія Гаусса примѣнительно къ семизначному вычисленію орбиты*, Юрьевъ, 1916.

[32] Vega, *Thesaurus logarithmorum*, Lipsiae 1794.

[33] Вильевъ, *Къ вопросу о рѣшеніи уравненія Гаусса*, Изв. Пулк. Обс., 1916 г., VII, стр. 78.