Опредѣленіе

массы системы земля-луна

по геодезическимъ измѣреніямъ и наблюденіямъ.

А. Я. Орловъ.

Юрьевъ.
Типографія К. Маттисена.
1910.

Опредѣленіе массы системы земля-луна по геодезическимъ измѣреніямъ и наблюденіямъ.

Le moyen le plus précis d'avoire la masse de la terre est de faire usage de la longueur observée du pendule à secondes.

[Laplace. Histoire de l'Acad. 1789. Memoires p. 14].

§ 1. Различныя тѣла притягиваются землею по тому же самому закону, по которому солнце притягиваетъ землю; поэтому, если f есть постоянная силы земного притяженія, выраженная въ „*C. G. S.*“ единицахъ, а k^2 есть гауссова постоянная, т. е. постоянная той же самой силы, но выраженная въ астрономическихъ единицахъ, то f и k^2 отличаются другъ отъ друга только вслѣдствіе выбора единицъ. Такъ какъ размѣръ постоянной ньютонова притяженія есть

$$\frac{[L^3]}{[M]\ [T^2]}$$

то f и k^2 связаны равенствомъ

$$f = \frac{k^2 L^3}{M T^2},$$

гдѣ L есть среднее разстояніе земли отъ солнца въ сантиметрахъ, M масса солнца въ граммахъ, а T число секундъ въ среднихъ солнечныхъ суткахъ. Преобразуемъ нѣсколько написанную формулу, а именно вмѣсто L введемъ параллаксъ солнца p и вмѣсто M — отношеніе массы земли къ массѣ солнца. Пусть m есть масса земли въ граммахъ и a ея большая полуось въ сантиметрахъ, тогда

$$L = \frac{a}{\sin p} ,$$

и если

$$\mu = \frac{m}{M} ,$$

то:

$$f m = \frac{k^2 a^3 \mu}{T^2 \sin^3 p} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Изъ величинъ, входящихъ въ эту формулу, T есть постоянное число; k^2 вычислено Гауссомъ; a получается изъ геодезическихъ измѣренiй; мы покажемъ сейчасъ, что величину произведенiя $f m$ можно вычислить съ достаточной точностью по наблюденiямъ силы тяжести. Слѣдовательно, формула (1) можетъ служить для опредѣленiя величины отношенiя $\frac{\mu}{\sin^3 p}$, и, если мы зададимся какимъ нибудь значенiемъ p, то найдемъ μ.

§ 2. Для вычисленiя произведенiя fm по наблюденiямъ силы тяжести, мы воспользуемся основными теоремами теорiи потенцiала. Пусть U есть потенцiалъ силы тяжести, V — потенцiалъ земного притяженiя, w — скорость вращенiя земли, x и y — координаты какой-нибудь точки земной поверхности, параллельныя взаимно перпендикулярнымъ осямъ, лежащимъ въ плоскости экватора и пресѣкающимся въ центрѣ земли. Мы имѣемъ

$$U = V + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) .$$

По теоремѣ Грина,

$$\int\int\int \triangle U \, dQ = -\int\int \frac{dU}{dn} dS ,$$

гдѣ $d Q$ и $d S$ означаютъ элементы объема и поверхности, а n — внутреннюю нормаль.

Но

$$\int\int\int \triangle U \, dQ = \int\int\int \triangle V \, dQ + 2 \, w^2 Q ,$$

гдѣ Q есть объемъ земли. Далѣе

$$\int\int\int \triangle V \, dQ = -\int\int \frac{dV}{dn} dS ,$$

и, по теоремѣ Гаусса,

$$\int\int\frac{dV}{dn}\,dS = 4\pi\,fm\ ;$$

слѣдовательно:

$$\int\int\frac{dU}{dn}\,dS = 4\pi\,fm - 2\,w^2\,Q\ .$$

Пусть, теперь, g есть ускореніе силы тяжести; тогда

$$\frac{dU}{dn} = g\ ,$$

и мы получаемъ для произведенія fm такое выраженіе:

$$fm = \frac{w^2\,Q}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\int\int g\,dS\ .$$

Отсюда видно, что величина произведенія fm будетъ намъ извѣстно, если извѣстно g для каждой точки земной поверхности, и если задано Q. Величину g мы находимъ по наблюденіямъ силы тяжести, а объемъ земли Q мы можемъ вычислить по результатамъ геодезическихъ измѣреній.

§ 3. Интегралъ $\int\int g\,d\,S$, который намъ нужно теперь вычислить, распространенъ на всю поверхность земного эллипсоида. Пусть u и λ суть приведенная широта и долгота какой нибудь точки $(x,\ y,\ z)$ этой поверхности; e — эксцентриситетъ меридіанного сѣченія земли, тогда:

$$x = a\cos u\cos\lambda,$$

$$y = a\cos u\sin\lambda,$$

$$z = a\sqrt{1-e^2}\sin u\ ,$$

такъ что

$$dS = a^2\cos u\sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,d\,u\,d\,\lambda\ .$$

Переходя отъ приведенной широты къ астрономической, получаемъ:

$$dS = \frac{a^2\,(1-e^2)\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi\,d\,\lambda\ .$$

Пренебрегая четвертыми степенями эксцентриситета, мы можемъ написать

$$dS = [a^2 (1 - e^2) \cos\varphi + 2\, a^2 e^2 \cos\varphi \sin^2\varphi]\, d\varphi\, d\lambda\ .$$

Съ другой стороны,

$$g = g_0 (1 + \alpha \sin^2\varphi),$$

гдѣ g_0 и α суть двѣ постоянныя величины.

Такъ какъ α есть малая величина того же порядка, что и e^2, то, съ принятой степенью точности, мы будемъ имѣть:

$$g\, dS = \beta\, [\cos\varphi + (\alpha + 2\, e^2) \cos\varphi \sin^2\varphi]\, d\varphi\, d\lambda\ ,$$

гдѣ для краткости мы положили

$$\beta = g_0\, a^2 (1 - e^2)\ .$$

Произведя интегрированіе, получимъ

$$\int\!\!\int g\, dS = 4\pi\beta \left(1 + \frac{\alpha + 2\, e^2}{3}\right) = 4\pi\, g_0\, a^2 \left(1 + \frac{\alpha - e^2}{3}\right)\ .$$

Мы находимъ такимъ образомъ, что

$$fm = \frac{w^2\, Q}{2\pi} + g_0\, a^2 \left(1 + \frac{\alpha - e^2}{3}\right)\ .$$

Пользуясь теоремой Клеро, мы можемъ представить эту формулу въ слѣдующемъ простомъ видѣ:

$$fm = g_0\, a^2 \left(1 + \frac{3\,\alpha - e^2}{5}\right)\ .$$

§ 4. Для дальнѣйшихъ вычисленій возьмемъ по Кларку:

$$lg\, a = 8.80470\ ,$$
$$lg\, e^2 = 7.8327 - 10\ .$$

Тогда

$$lg\,Q = 27.03471.$$

Затѣмъ, соотвѣтственно новѣйшимъ опредѣленіямъ,

$$g_0 = 978.02 \text{ и } \alpha = 0.00529 \ .$$

Произведя вычисленія, получаемъ:

$$lg\,fm = 20.60054,$$

и по формулѣ (1):

$$lg\,\frac{\mu}{sin^3 p} = 7.58830 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

§ 5. Въ настоящее время въ астрономіи принято:

$$p = 8''.80 \text{ и } \mu + \nu = \frac{1}{329390}$$

гдѣ ν есть масса луны въ астрономическихъ единицахъ, причемъ по Gill'ю

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{81.70} \ ,$$

такъ что

$$lg\,\mu = 4.47700 - 10 \ .$$

Составляя отношеніе $\frac{\mu}{sin^3 p}$, находимъ:

$$lg\,\frac{\mu}{sin^3 p} = 7.58685 \ .$$

Это число меньше того, которое мы нашли въ предыдущемъ параграфѣ по геодезическимъ измѣреніямъ. Изъ этого мы заключаемъ, что нужно или уменьшить p или увеличить μ. Но всѣ новѣйшія опредѣленія параллакса солнца даютъ для p числа весьма близкія къ $8''.80$, и эти числа скорѣе больше, нежели меньше чѣмъ $8''.80$; слѣдовательно, должно быть увеличено μ. При $p = 8''.80$, соотвѣтственно формулѣ (2), должно быть:

$$\mu + \nu = \frac{1}{328280} \ .$$

§ 6. Примемъ:

$$p = 8''.803\ ;$$

тогда, по формулѣ (2):

$$lg\,\mu = 4.47890 - 10$$

и

$$\mu + \nu = \frac{1}{327950}\ .$$

Это есть какъ разъ то самое значеніе массы земли и луны, которое нашелъ Виттъ по наблюденіямъ Эроса. [G. Witt. Ueber die Notwendigkeit einer Verbesserung der Masse des Systems Erde-Mond. Viertelj. 43. 1908.].

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что какъ астрономическія, такъ и геодезическія наблюденія показываютъ, что принятое въ настоящее время значеніе массы системы земля-луна должно быть увеличено. Вмѣсто $\frac{1}{329390}$ нужно взять $\frac{1}{328000}$.

Замѣчаніе. Мы нашли выше (§ 4): $fm = [20.60054]$. Раздѣляя обѣ части этого равенства на Q, получаемъ важную формулу Woodward'a:

$$lg\,f\rho_m = 3.56583 - 10,$$

гдѣ ρ_m есть средняя плотность земли. [Astron. Journ. № 424. 1898.].